MATEMÁTICA NA UNIVERSIDADE; por que tanta reprovação?

Renato J. Costa Valladares
Portal Matemática – www.Portalmatematica.com
e-mail do autor: rjcvalladares@gmail.com
Palavras chave: Velocidade, deslocamento, derivada, primitiva, integral

Abstract: The aim of this paper is to present the integral as an inversion of the derivative and as a product extension associated to a function *f*. This approach leads very quickly to a characterization of a product extension associated to *f* as an anti-derivative of *f*. Under this point of view the basic ideas and the usual applications become very simple. The mathematical foundation becomes simple also. For instance the extension product theorem uses only resources of the Differential Calculus and the existence theorem of an anti-derivative for a continuous function doesn't need uniform continuity.

INTRODUÇÃO

Nesta oficina usaremos a "Metodologia da Matemática Cultural" ajustada à "Cultura do Automóvel". As bases desta metodologia foram lançadas no artigo "Matemática Cultural; um método de ensino e aprendizagem" e no livro "O Jeito Matemático de Pensar". Estes trabalhos são de nossa autoria, foram publicados em 2003 e divulgavam pesquisas iniciadas no final do século XX. O artigo saiu na revista da SBEM. O livro saiu pela "Ciência Moderna" e está na 2ª edição. A pesquisa ainda está em plena atividade e tem muito a oferecer. Deu origem a cerca de 30 trabalhos como livros, artigos, monografias, etc. Parte expressiva deste material é da autoria de colegas e alunos.

O procedimento básico da Matemática Cultural é buscar conhecimentos adaptáveis à Matemática, na cultura geral das pessoas comuns (eu, você, a vizinha, o entregador, etc.). Após 15 anos de trabalho ousamos afirmar que há um verdadeiro manancial de conhecimentos deste tipo, que oferecem as mais diversas alternativas de abordagem matemática. Estes conhecimentos renovam ou simplificam a Matemática nos 3 níveis de ensino.

Para exemplificar estes fatos, nesta oficina a integral será abordada sob o ponto de vista da "cultura do automóvel". Como o leitor pode verificar, a matéria é tratada dentro dos melhores padrões matemáticos. Em decorrência disso, dificuldades desnecessárias foram eliminadas, facilitando o trabalho docente e oferecendo "simplificações legítimas" ao estudante. Estas simplificações serão comentadas caso a caso, ao longo do texto.

1 – CULTURA DO AUTOMÓVEL

Para calcular o deslocamento em uma viagem de carro, na partida o motorista anota o deslocamento (quilometragem) no odômetro (ex: 51.327). Lê o deslocamento na chegada (ex: 51.537). Subtrai o deslocamento da chegada do da partida e obtém o deslocamento da viagem (ex: 51.537 – 51.327 = 210). Marcando a hora da partida (ex: 8h) e a da chegada (ex: 11h) a subtração "hora da chegada menos hora da partida" é o tempo da viagem, (ex: 11 – 8 = 3 horas). A divisão do deslocamento pelo tempo da viagem é velocidade média da viagem que, nos exemplos, é de (210/3 =) 70 km/h. Raramente o velocímetro marca a velocidade média, pois esta velocidade é constante e o trânsito não se adapta à velocidade constante. O velocímetro marca velocidade instantânea. Nós sabemos que esta velocidade é a derivada do deslocamento em função do tempo. Usaremos estes raciocínios neste trabalho. Mediremos deslocamentos curtos e rápidos em metro por segundo (m/s).

Para calcular o deslocamento em uma viagem de carro, na hora da partida o motorista anota o deslocamento (quilometragem) no odômetro (ex: 51.327). Lê o deslocamento na chegada (ex: 51.537). Subtrai o deslocamento da chegada do da partida e obtém o deslocamento da viagem (ex: 51.537 – 51.327 = 210). Marcando a hora da partida (ex: 8h) e a da chegada (ex: 11h) a subtração "hora da chegada menos hora da partida" é o tempo da viagem, (ex: 11 – 8 = 3 horas). A divisão do deslocamento pelo tempo da viagem é a velocidade média da viagem que, nos exemplos, é de (210/3 =) 70 km/h. Raramente o velocímetro marca a velocidade média, pois esta velocidade é constante e o trânsito não é propício a velocidade constante. O velocímetro marca velocidade instantânea. Sabemos que esta velocidade é a derivada deslocamento/tempo. Usaremos estes raciocínios neste trabalho. Deslocamentos curtos e rápidos serão medidos em metro por segundo (m/s).

Simplificação legítima: A velocidade e o deslocamento dos carros são os mesmos há mais de um século e podem ser usados sem restrições no contexto da derivada e da integral. Os gráficos dos jornais variam muito. Isto restringe matematicamente os gráficos a serem usados nas tangentes e áreas que contextualizam a derivada e a integral. Com o andamento da matéria veremos que este fato contribuirá para que a cultura do automóvel seja mais simples que as tangentes e áreas usadas na abordagem convencional do Cálculo.

Nota do autor: Em certo sentido deslocamento e velocidade têm a sólida consistência de postulados.

2 - INVERSÃO DA DERIVADA

Como a velocidade de um carro é a derivada do deslocamento, segue-se que o deslocamento é uma primitiva da velocidade. Se a velocidade for $f(t) = 2t$ então o deslocamento será $F(t) = t^2 + c$, c é constante. Para saber o deslocamento entre 3 e 10 segundos, basta calcular o deslocamento no instante 10 e subtrair do deslocamento no instante 3 obtendo $F(10) - F(3) = 100 + c - 9 - c = 91$.

Observação: A constante c não interfere no deslocamento. Se usarmos metro e segundo o deslocamento é de $91m$, o tempo é de $7s$ e a velocidade média é $13m/s$. Esta velocidade é igual a $46{,}8km/h$.

i) Se a velocidade de um carro for uma função f do tempo t, o deslocamento é uma primitiva F de f e o deslocamento entre instantes a e t será $F(t) - F(a)$. Isto se aplica a $f = m$ constante, pois o deslocamento é o produto $m(t - a) = mt - ma$ ou $mt + n$ se $n = -ma$. Denotando o deslocamento por $P(t) = mt + n$, a velocidade é a derivada $P' = m$.

Em geral, fixando a temos a função $P(t) = F(t) - F(a)$ que é a primitiva de f que se anula em a. Isto possibilita interpretar P como sendo o deslocamento a partir do instante a.

Como a inversão da derivada resolveu o problema do deslocamento, cabe perguntar se a inversão da derivada se aplica a outras situações. A resposta é sim como veremos na sequência. Para isso vamos relembrar abaixo notações, terminologia e resultados correntes na literatura, relacionando primitivas, integrais indefinidas e definidas em que F é uma primitiva de uma função f.

$$\int f(x)dx = F(x) + c\,;\ \int_a^t f(x)dx = \int_a^t f(t)dt = F(t) - F(a)\text{. Logo } \frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)\,.$$

ii) Custo marginal e custo total: O custo para produzir uma unidade de certo bem, é conhecido como *custo marginal*. Em decorrência do chamado *efeito escala*, este custo varia de acordo com a quantidade produzida. Pensando no custo marginal e no custo total como funções da quantidade produzida, verifica-se que o custo marginal é a derivada do custo total. Consequentemente, o custo total é uma primitiva do custo marginal. Logo se o custo marginal for uma função f da quantidade produzida x, segue-se que a função custo total a partir de uma quantidade a será a integral abaixo (se existir).

$$\int_a^x f(x)dx\,.$$

iii) Imposto: Em 2012 o imposto de renda era cobrado com base nos percentuais abaixo. Até 1.637,11 isento. Acima de 1.637,11 até 2.453,50, 7,5%. Acima de 2.453,50, até 3.271,38, 15%. Acima de 3.271,38, até 4.087,65, 22,5%. Acima de 4.087,65, 27,5%.

Simplificação legítima: Vimos acima que cada real ganho pelo contribuinte não custa nada na 1ª faixa de renda, custa R$ 0,075 na 2ª e R$ 0,275 na última faixa. Sob este ponto de vista os percentuais determinam o custo marginal para efeito de tributação. Neste caso, a função custo marginal é $f(x)$ abaixo em que x é dinheiro e a = 1.637,11; b = 2.453,50; c = 3.271,38; d = 4.087,65. Estes números fazem parte da legislação.

$f(x) = 0$, se $x \leq a$; $f(x) = 0{,}075$, se $a < x \leq b$;

$f(x) = 0{,}15$, se $b < x \leq c$; $f(x) = 0{,}225$, se $c < x \leq d$; $f(x) = 0{,}275$, se $d < x$.

Se F for o custo total sua é $F' = f$. Se alguém receber x reais na terceira faixa o imposto a pagar cai na integral abaixo e se limita à 2ª casa decimal por se tratar de dinheiro.

$$\int_0^x f(x)dx = \int_0^a 0dx + \int_a^x 0{,}075dx = 0 + 0{,}75x - 0{,}075a \approx 0{,}075x - 122{,}78.$$

A parcela negativa no cálculo acima é o desconto correspondente à 3ª faixa que aparece nas tabelas de IR. A integral calcula este desconto automaticamente. O leitor pode verificar que se $x = R\$2.020{,}00$ o imposto a ser pago é $R\$28{,}23$.

Usando integral tem-se abaixo a função imposto a pagar que sai nos jornais.

$F(x) = 0$, $x \leq a$; $F(x) = 0{,}075x - 122{,}78$, $a < x \leq b$; $F(x) = 0{,}15x - 306{,}80$, $b < x \leq c$;

$F(x) = 225x - 552{,}15$, $c < x \leq d$; $F(x) = 0{,}275x - 756{,}53$, $d < x$.

iv) Questionamento: Como o IR pode ser calculado sem integral, este recurso não é uma complicação desnecessária? Em resposta observemos que no IR a integral é uma nova maneira de fazer algo conhecido. Isto pode ser usado pelo professor, para dar credibilidade à integral. Isto é, o IR pode não precisar da integral, mas integral precisa do IR.

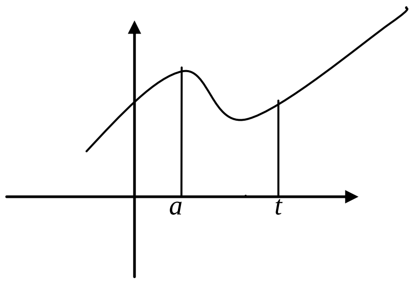
v) Área: A área da região plana limitada pelo eixo $0x$, pelo gráfico de uma função f e por retas $x = a$ e $x = t$ será denotada pela função F abaixo.

$F(t)$ = *área limitada pelo gráfico de f entre a e t* (fig.1a).

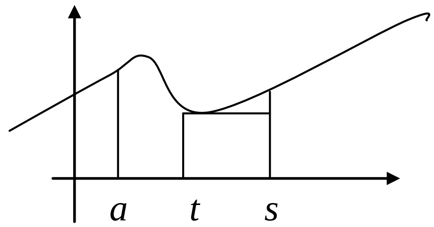
Para determinar F começaremos pela derivada F'. O módulo do numerador $F(t) - F(s)$ da razão incremental de F é como abaixo.

$|F(t) - F(s)|$ = *área limitada pelo gráfico de f entre s e t.*

Fig.1.



a



b

Adotaremos a hipótese clássica que a área $|F(t) - F(s)|$ tende para a área do retângulo com altura $|f(t)|$ e base $|t - s|$ quando $s \to t$. Como esta última área é $|t - s||f(t)|$ (fig.1b) segue-se que o módulo da derivada de F satisfaz (vi) abaixo.

vi) $|F'(t)| = |\lim_{s\to t} \dfrac{F(t)-F(s)}{t-s}| = |\lim_{s\to t} \dfrac{|t-s||f(t)|}{t-s}| = |f(t)|.$

Logo $F'(t) = \pm |f(t)|$. Escolhendo o sinal positivo tem-se $F'(t) = |f(t)|$. Define-se a *área limitada pelo gráfico de f entre a, t* pela integral abaixo, se existir.

vii) $F(t) = \int_a^t |f(x)|\,dx.$

Simplificações legítimas: Embora simples, o estudo da área satisfaz os melhores padrões matemáticos. Grande parte desta simplicidade decorre da expressão $|t - s||f(t)|$ em (vi). Esta expressão é uma parcela da soma de Riemann da função f. A abordagem clássica usa a soma inteira. Isto causa dificuldades desnecessárias. Outra simplificação importante é o não uso da continuidade uniforme. Este recurso é indispensável na abordagem clássica.

viii) Comprimento do arco: Seja uma função diferenciável f e tomemos $(a, f(a))$ e $(t, f(t))$ no gráfico de f. Pode-se usar uma fita métrica para medir o comprimento do arco do gráfico com estes extremos. Fixando a fazendo t variar, obtemos a função abaixo.

$L(t)$ = *comprimento do arco de extremos* $(a, f(a))$ *e* $(t, f(t))$.

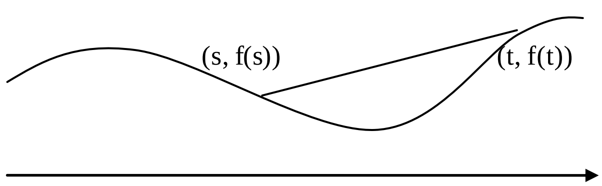


Fig2.

Para dispensar a fita métrica devemos determinar L. Comecemos pela derivada L'. Para isto observemos que o módulo do numerador da razão incremental é (fig.2).

$|L(t) - L(s)|$ = *comprimento do arco de extremos* $(s, f(s))$ *e* $(t, f(t))$.

Usaremos a hipótese clássica que quando $t \to s$, $|L(t) - L(s)|$ tende ao comprimento do segmento de reta com os mesmos extremos. Este comprimento é $[t - s)^2 + (f(t) - f(s))^2]^{1/2}$. Como f é diferenciável, pode-se aproximar $f(t) - f(s)$ por $f'(s)(t - s)$ e obter o seguinte limite.

$$[(t - s)^2 + (f(t) - f(s))^2]^{1/2} \to |t - s|\sqrt{1+ f'(s)^2} \text{ se } t \to s.$$

Isto significa que o módulo da derivada $L'(s)$ é como abaixo.

$$|L'(s)| = lim_{t\to s} \frac{|L(x)-L(s)|}{|t-s|} = lim_{t\to s} \frac{|t-s|\sqrt{1+f'(s)^2}}{|t-s|} = \sqrt{1+ f'(s)^2} .$$

Isto é,

$$L'(s) = \pm [1 + f'(s)^2]^{1/2}.$$

Se L for crescente tem-se $L'(s) \geq 0$, logo $L'(s) = [1 + f'(s)^2]^{1/2}$. Isto leva a definir o *comprimento do arco do gráfico de f entre a e t* pela integral abaixo.

ix) $L(t) = \int_a^t [1 + f'(x)^2]^{1/2} dx$. Se L for decrescente multiplica-se por -1.

Simplificação legítima: Esta abordagem é mais simples que a abordagem clássica.

3 – EXTENSÃO DO PRODUTO

i) Deslocamento é um conceito definido pelo produto "tempo vezes velocidade" quando a velocidade é um número m que é um fator deste produto. A velocidade constante é uma situação especial que é incompatível com o trânsito. Em condições normais a velocidade varia e recai em uma função f do tempo. A ausência do fator m inviabiliza o produto. Em 1.(i) o produto inviabilizado foi substituído por uma primitiva F de f. Diremos que F é a *extensão do produto* associada à velocidade f, para definir o deslocamento.

ii) Área: Para calcular a área entre o eixo $0x$ e o gráfico de uma função constante m, entre pontos a e x em $0x$ (fig.3a) usa-se o produto "base vezes altura" abaixo.

$m(x - a) = mx + n$, $n = -am$.

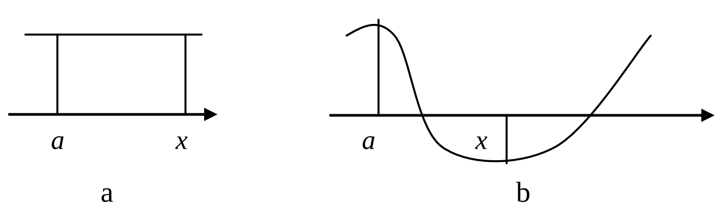


Fig.3.

A altura do gráfico de uma função f no ponto x é o módulo $|f(x)|$ que varia em $0x$ (fig. 3b). Em geral isto inviabiliza o produto "base vezes altura". Como vimos em 2.(vii) o produto inviabilizado foi substituído por uma primitiva F de f. Neste caso a primitiva F é a *extensão do produto* associada à altura $|f|$ do gráfico para definir a área.

iii) Problema da extensão do produto: Se um conceito C for definido pelo produto de um fator m por um fator x, coloca-se o problema de definir este conceito na situação que o fator m é trocado por uma função f do fator x. Este é o *problema da extensão do produto* que generaliza o deslocamento e a área acima e ocorre em muitas outras situações. A solução (se existir) será chamada de *extensão do produto* associada a f. Vimos acima que a extensão do produto para obter o deslocamento é a primitiva da velocidade. Vimos também que a extensão do produto para obter a área é uma primitiva da altura. Como o problema geral é idêntico ao deslocamento e a área, coloca-se a pergunta abaixo.

A primitiva também é extensão do produto no caso geral?

A resposta é sim e se aplica a muitas situações. A fundamentação matemática do "sim" será feita um pouco à frente em 3.(iii). Esta fundamentação é muito mais simples que a usual na literatura. O conceito "extensão do produto" só será definido adiante em 3.(ii), entretanto entendemos que o leitor já tem uma ideia clara sobre o assunto e poderá ver algumas aplicações agora. Para isso admitiremos que uma primitiva F de uma função f é uma extensão do produto associada a f.

iv) Preservação da operação inversa: Produto e quociente decorrem de operações inversas. A razão incremental sugere que a derivada é uma extensão do quociente. Se a primitiva for entendida como extensão do produto, *a "inversão" entre quociente e produto é preservada nas respectivas extensões* (esquema abaixo). Isto ajuda a entender o Cálculo.

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{Quociente} & \rightarrow extensão \rightarrow & \boldsymbol{Derivada} \\ \updownarrow & \leftarrow \ inversão \ \rightarrow & \updownarrow \\ \boldsymbol{Produto} & \rightarrow extensão \rightarrow & \boldsymbol{Integral} \end{array}.$$

v) Custo de estocagem: O custo para um supermercado estocar 7 toneladas de arroz entre os dias a e t é $7(t - a)$ (quantidade vezes tempo) vezes o custo para estocar uma tonelada durante um dia. Se em decorrência das vendas a quantidade for $f(t)$ em função do tempo, o custo de estocagem é a extensão do produto associada a f que é a integral abaixo, se existir.

$$\int_a^t f(x)dx\,.$$

Se o custo para estocar 1 tonelada durante 1 dia for c, o custo de estocagem será $c\int_a^t f(x)dx$.

vi) Área; extensão do produto: Área é o produto da base pela altura. Assim, quando a altura for uma função h do ponto da base onde é medida, a área será uma extensão do produto associada a h. Por exemplo, para calcular a área entre o eixo $0x$ e o gráfico de uma função f, a altura medida a partir do ponto x na base será $h(x) = |f(x)|$. Logo se $|f|$ admitir primitiva, esta primitiva é uma extensão do produto associada a $|f|$, e a área desta região a partir da reta $x = a$ até a reta $x = t$ será definida pela integral abaixo que já foi calculada em 1.(vi).

$$\int_a^t | f(x) | \, dx .$$

Nota: A área foi estudada duas vezes, uma em 2.(vii) e outra acima.

vii) Volume é o produto "área da base vezes altura". Quando a área da base for uma função A do ponto da altura onde é medida, o volume será uma extensão do produto associada a A. Segue-se daí que o volume a partir da altura a até a altura t é (por definição) a integral abaixo, se existir.

$$V(t) = \int_a^t A(s)ds .$$

Exemplo; sólido de revolução: Para calcular o volume do sólido gerado pela revolução do gráfico de uma função f em torno do eixo $0x$, basta notar que em cada ponto x, a base do sólido é um círculo de raio $|f(x)|$, cuja área é $A(x) = \pi f(x)^2$ (fig.4).

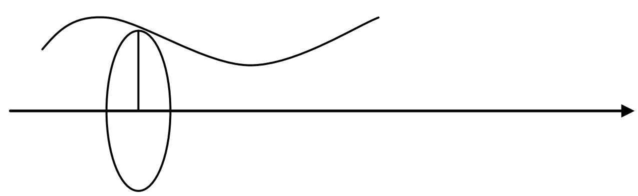


Fig.4.

Logo, o volume deste sólido a partir de um ponto a até um ponto t é

$$V(t) = \int_a^t \pi f(x)^2 \, dx .$$

viii) Simplificação legítima: O cálculo do volume acima ficou simples porque usou a extensão *produto* $\rightarrow$ *integral*. Por não dispor desta extensão, o método clássico usa recursos geométricos complexos para adaptar a extensão *área* $\rightarrow$ *integral* ao cálculo do volume.

Exemplo; elipsóide: Para calcular o volume do sólido limitado pelo elipsóide $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$, tomaremos o segmento de extremos $(-a, 0, 0)$ e $(a, 0, 0)$ como sendo a altura. Neste caso, a base correspondente ao ponto $(t, 0, 0)$ é a região E_t limitada pela interseção do elipsóide com o plano $x = t$, que é a elipse de equação $(y/b)^2 + (z/c)^2 = 1 - (t/a)^2$ (fig.5).

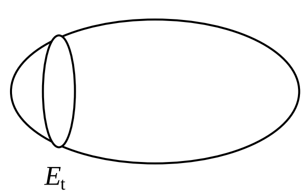


Fig.5.

Como os semi-eixos desta elipse são $B = (b/a)(a^2 - t^2)^{1/2}$ e $C = (c/a)(a^2 - t^2)^{1/2}$; $-a \leq t \leq a$, a área de E_t é $A(t) = BC\pi = bc\pi(a^2 - t^2)$. Logo, o volume procurado é

$$\int_{-a}^{a} A(t)dt = \int_{-a}^{a} bc\pi(a^2 - t^2)dt = \frac{4}{3}abc\pi .$$

ix) Vazão total: Se a taxa de vazão de um rio for de $1.000.000m^3$ por dia, entre o dia a e o dia t, a vazão total será de $1.000.000(t - a)m^3$. Se por questões climáticas a taxa de vazão for $f(t)$ em função do tempo, a vazão total é uma extensão do produto associada a f, que é a integral abaixo, se existir.

$$\int_{a}^{t} f(x)dx .$$

Nota: Os estudos acima se adaptam a outras aplicações como trabalho, excedente do consumidor etc. Esta é mais uma vantagem da extensão do produto que unifica a Matemática, ao usar recursos iguais em situações diferentes.

x) Comprimento, extensão do produto e medida: Sabemos do Cálculo que a reta $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ é tangente ao gráfico de uma função f em $(a, f(a))$ e passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(a + 1, f'(a) + f(a))$. A distância entre estes pontos é $[1 + f'(a)^2]^{1/2}$. Logo o comprimento desta reta entre $(a, f(a))$ e $(t, f(t))$ é o produto $(t - a)[1 + f'(a)^2]^{1/2}$. Se a derivada for $f' = constante$ o comprimento do arco do gráfico de f coincidirá com este produto. Se f' não for constante, $[1 + f'(a)^2]^{1/2}$ transforma-se na função $g(x) = [1 + f'(x)^2]^{1/2}$. Logo, o comprimento do arco é uma extensão do produto associada a g. Esta extensão é a integral em 1.(ix). Este raciocínio se aplica a outras medidas, pois medir é multiplicar pela unidade de medida quando esta unidade for constante. Quando a unidade de medida passa a ser uma função g, a medição passa a ser uma extensão do produto associada a g e recai em uma integral. Desta forma pode-se obter muitas simplificações legítimas.

4 - EXTENSÃO DO PRODUTO; formalização do conceito

No caso do deslocamento em velocidade f sabemos que uma primitiva F de f é uma extensão do produto associada a f. Para generalizar esta ideia examinemos o seguinte fato.

i) Fato: *Suponhamos que entre* 2 *e* 5 *horas o carro de Pedro se desloca a* 40*k/h*; *o de Ana em velocidade variável f e o carro de Paulo, a* 70*km/h*. *Se* $40 \leq f(x) \leq 70$ *em todos os instantes x entre* 2*h e* 5*h*, *então os deslocamentos* D_1, D_2 *e* D_3 *dos carros de Pedro, Ana e Paulo, respectivamente, satisfazem as desigualdades* $D_1 \leq D_2 \leq D_3$.

Neste caso, $D_1 = 40\times(5 - 2)$ e $D_3 = 70\times(5 - 2)$. Se F for uma extensão do produto associada a f, segue-se que o deslocamento do carro de Ana é $D_2 = F(5) - F(2)$. Logo a desigualdade acima se escreve como $40\times(5 - 2) \leq F(5) - F(2) \leq 70\times(5 - 2)$.

Em geral se F for o deslocamento em velocidade f, segue-se que *se tomarmos números* $s < t$, m, M *que satisfaçam as desigualdades* $m \leq f(x) \leq M$, *para todo x entre s e t, então F satisfaz as seguintes desigualdades*: $m(t - s) \leq F(t) - F(s) \leq M(t - s)$.

Além do deslocamento estas observações se ajustam a todas as situações estudadas acima. As desigualdades mostram que a extensão do produto, nestes casos, respeita a relação de ordem. Esta é uma exigência natural que será tomada como base para o caso geral. Por simplicidade suporemos que f tem o domínio D_f conexo ou, segundo muitos autores, que D_f é um intervalo generalizado.

ii) Extensão do produto: Seja f uma função e sejam números m, M, s, t com $s < t \in D_f$, que satisfazem as desigualdades $m \leq f(x) \leq M$, para todo x entre s, t. Diremos que uma função F é uma *extensão do produto associada a f* se para todos m, M, s, t nestas condições, *F satisfizer as seguintes desigualdades*: $m(t - s) \leq F(t) - F(s) \leq M(t - s)$.

Questionamento: Não seria mais simples definir a extensão do produto em um ponto fixo s e uma variável t, como é feito com limite, continuidade e derivação?

Resposta: Talvez sim, precisamos discutir o assunto.

Se f for velocidade, vimos em 1.(i) que uma primitiva F de f é uma extensão do produto associada a f. Veremos abaixo que este é um fato geral.

iii) Teorema da extensão do produto: *Uma primitiva F de uma função f é uma extensão do produto associada a f. Se f for contínua e F for uma extensão do produto associada a f, então F é uma primitiva de f.*

Prova: Seja F uma primitiva de f e tomemos números $s < t \in D_f$. Usando o teorema do valor médio, podemos concluir que existe c entre s e t tal que

$$F(t) - F(s) = F'(c)(t - s) = f(c)(t - s).$$

Sejam m, M números tais que $m \leq f(x) \leq M$, para todo x entre s e t. Tomando $x = c$ tem-se $m \leq f(c) \leq M$. Logo

$$m(t - s) \leq f(c)(t - s) \leq M(t - s) \text{ e daí, } m(t - s) \leq F(t) - F(s) \leq M(t - s).$$

Segue-se da definição (ii) que F é uma extensão do produto associada a f, o que mostra a 1ª afirmação. Para mostrar a 2ª afirmação estudaremos o limite da razão incremental de F.

Seja $\varepsilon > 0$. Como f é contínua, existe um número $\delta > 0$ tal que se $|t - s| < \delta$, então $|f(t) - f(s)| < \varepsilon/2$. Se x estiver no intervalo de extremos s e t, segue-se que

$$|x - s| < \delta; \text{ que } |f(x) - f(s)| < \varepsilon/2 \text{ e que } f(s) - \varepsilon/2 < f(x) < f(s) + \varepsilon/2.$$

Tomando $t > s$ e lembrando que F é extensão do produto, sejam $m = f(s) - \varepsilon/2$ e $M = f(s) + \varepsilon/2$. Segue-se da definição (ii) que

$$(f(s) - \varepsilon/2)(t - s) \leq F(t) - F(s) \leq (f(s) + \varepsilon/2)(t - s).$$

Logo

iv) $f(s) - \varepsilon/2 \leq \dfrac{F(t) - F(s)}{t - s} \leq f(s) + \varepsilon/2$ e $\left|\dfrac{F(t) - F(s)}{t - s} - f(s)\right| < \varepsilon$.

Como a desigualdade (iv) vale se $s \neq t$, pois $\dfrac{F(s)-F(t)}{s-t} = \dfrac{F(t)-F(s)}{t-s}$, segue-se que

$$\lim_{t \to s} \frac{F(t)-F(s)}{t-s} = f(s) = F'(s).\ Cqd.$$

Simplificação legítima: Ao ser vista como extensão do produto, a integral não deixa de ser soma porque, como a Álgebra ensina, o produto é uma soma. Entretanto ao vermos a integral como extensão do produto usa-se, a nosso favor, o trabalho feito pela Álgebra e isto simplifica a integral.

5 - QUESTÕES MATEMÁTICAS, CULTURAIS E EDUCACIONAIS

i) Evolução natural: O problema do deslocamento conduz naturalmente ao problema da extensão do produto. Como o deslocamento é uma extensão do produto e também é uma primitiva da velocidade, é natural considerar que este fato é geral. No plano operacional e no plano formal a extensão do produto se apoia na realidade do automóvel, que é bem conhecida por todos. O teorema da extensão do produto é mais simples e mais completo que o teorema fundamental do cálculo usado na abordagem clássica da integral. É mais simples porque só usa o limite convencional e a derivada, dispensando o limite de somas de Riemann. É mais completo porque contém uma recíproca para o caso das funções contínuas. Na abordagem clássica isto só é possível com o uso da continuidade uniforme que é um conceito mais complexo. Assim, a presente abordagem conduz ao Cálculo Integral de uma forma natural por meio do esquema *expectativa → conjectura → resultado* que – acreditamos - sintetiza uma maneira promissora de abordar a Matemática. Isto possibilita que o professor escolha um conceito definido por um produto $m(t - s)$ que seja importante para os estudantes. Usando este conceito como contexto ele pode chegar à integral estudando situações realistas em que o fator m é substituído por uma função f. Este procedimento quando pode ser usado tem resultados positivos, como já tivemos oportunidade de comprovar.

ii) Temas de referência: Como em geral o professor de Cálculo é leigo na futura área de conhecimento de seus alunos, é necessário usar tópicos bem conhecidos por alunos e professor como temas de referência. A abordagem convencional usa a área como tema de referência para a integral e a tangente para a derivada. Como “a tangente não é a derivada da área”, o uso destes temas esconde a inversão da derivada que é fundamental em nossa abordagem. Por este motivo nós preferimos o deslocamento e a velocidade que além de deixarem a inversão muito clara têm a vantagem de ser associados à cultura do automóvel que influencia fortemente o mundo há um século.

iii) Local “versus” global: A integral definida pensada como função do extremo superior foi decisiva neste trabalho. Ela permitiu estudar a função

$$F(t) = \int_a^t f(s)ds \text{, em vez do número } \int_a^b f(s)ds.$$

Este número é a área usada na abordagem clássica. Desta forma foi possível usar os recursos da derivação na função F. Salvo o teorema do valor médio, estes são recursos locais que estudam a função “nas vizinhanças de um ponto”. Esta abordagem dispensou a “continuidade uniforme” no estudo da área em 1.(vii) e no teorema da extensão do produto. O teorema de existência de primitiva de função contínua também dispensa a continuidade uniforme.

Para estudar a área, a abordagem clássica fixa o ponto $t = b$. Este procedimento obriga a estudar a função F no intervalo $[a, b]$ o que recai em recursos de natureza global. Como a "Matemática global" é mais difícil que a "Matemática local", entende-se a simplicidade legítima obtida por nossa abordagem.

6 – EM BUSCA DE EXTENSÕES DO PRODUTO

Seja f uma função (não necessariamente contínua) limitada em um intervalo fechado $[a, t]$. Isto é, existem o ínfimo e o supremo

$$h = inf\,\{f(x);\ x \in [a, t]\}$$

e

$$H = sup\{f(x);\ x \in [a, t]\}.$$

Como h e H satisfazem as desigualdades $h \leq f(x) \leq H$ para todo $x \in [a, t]$, uma extensão do produto F associada a f (se existir) satisfaz (i) abaixo (reveja 1.(i)).

i) $h(t - a) \leq F(t) - F(a) \leq H(t - s)$.

Se $F(a) = 0$ estas desigualdades se escrevem como

ii) $h(t - a) \leq F(t) \leq H(t - s)$.

Aproximações: O primeiro membro de (i), $h(t - a)$, é uma aproximação para $F(t)$ por falta e o 3º membro**,** $H(t - a)$, é uma aproximação por excesso. Para obter outra aproximação tomemos $s \in [a, t]$ e sejam os números

$$h_1 = inf\,\{f(x);\ x \in [a, s]\};\ H_1 = sup\{f(x);\ x \in [a, s]\}$$

e

$$h_2 = inf\,\{f(x);\ x \in [s, t]\};\ \ H_2 = sup\{f(x);\ x \in [s, t]\}.$$

Os mesmos raciocínios mostram que

$$h_1(s - a) \leq F(\mathrm{s}) - F(a) \leq H_1(s - a).$$

e

$$h_2(t - s) \leq F(t) - F(s) \leq H_2(t - s).$$

Como $F(a) = 0$ e $F(s)$ aparece com os sinais trocados, somando as desigualdades, tem-se

iii) $h_1(s - a) + h_2(t - s) \leq F(t) \leq H_1(s - a) + H_2(t - s)$.

Estas desigualdades mostram que $h_1(s - a) + h_2(t - s)$ é uma aproximação para $F(t)$ por falta e $H_1(s - a) + H_2(t - s)$, por excesso. O lema abaixo mostra que as aproximações (iii) são melhores que as aproximações (ii).

iv) Lema: *Nas condições acima,* $h(t - a) \leq h_1(s - a) + h_2(t - s)$ *e* $H(s - a) \geq H_1(s - a) + H_2(t - s)$.

Prova: Como $s \in [a, t]$ segue-se que $[a, s] \subset [a, t]$ e que $[s, t] \subset [a, t]$. Conseqüentemente,

$$\{f(x);\, x \in [a, s]\} \subset \{f(x);\, x \in [a, t]\}$$

e

$$\{f(x);\, x \in [s, t]\} \subset \{f(x);\, x \in [a, t]\}.$$

Segue-se que $h \leq h_1$, pois

$$h = inf\,\{f(x);\, x \in [a, t]\} \leq h_1 = inf\,\{f(x);\, x \in [a, s]\}.$$

Analogamente, $h \leq h_2$, $H \geq H_1$ e $H \geq H_2$. Logo,

$$h_1(s-a) + h_2(t-s) \geq h(s-a) + h(t-s) = h(t-a)$$

e

$$H_1(s-a) + H_2(t-s) \leq H(s-a) + H(t-s) = H(t-a).\ Cqd.$$

Generalização: Agora vamos generalizar as idéias acima, introduzindo mais pontos no intervalo $[a, t]$ para obter aproximações cada vez melhores para F. Isto nos leva à noção de partição.

v) Partição: Diz-se que um conjunto finito $p \subset [a, t]$ é uma *partição* de $[a, t]$ se os extremos $a, t \in p$. Por exemplo, o conjunto formado por 1, 4 e π é uma partição de $[1, 4]$. Embora $\{1, 3, \pi\} \subset [1, 4]$, não é partição deste intervalo, pois o extremo $4 \notin \{1, 3, \pi\}$. O conjunto $e = \{a, t\}$ é uma partição de $[a, t]$. Se $s \in [a, t]$, então a união $e \cup \{s\} = \{a, s, t\}$ é uma partição de $[a, t]$. Se p for partição de $[a, t]$, então $e \subset p$. Se $t = a$, o intervalo se reduz a $[a, t] = \{a, a\} = \{a\}$ e, neste caso, só existe a partição $\{a\}$. Um bom exercício (faça-o) é mostrar que se p e q forem partições de $[a, t]$ então a união $p \cup q$ e a interseção $p \cap q$ são partições de $[a, t]$.

vi) Seja f como acima e tomemos uma partição p de $[a, t]$. Usando a ordem crescente, podemos escrever $p = \{a = b_0 \leq b_1, ..., b_{k-1} \leq b_k = t\}$. Como f é limitada em $[a, t]$ ela será limitada em cada intervalo $[b_{i-1}, b_i] \subset [a, t]$. Logo para todo i existem o ínfimo e o supremo abaixo.

$$h_i = inf\,\{f(x);\, x \in [b_{i-1}, b_i]\} \text{ e } H_i = sup\{f(x);\, x \in [b_{i-1}, b_i]\}.$$

Se F for uma extensão do produto associada a f, tem-se

vii) $h_i(b_i - b_{i-1}) \leq F(b_i) - F(b_{i-1}) \leq H_i(b_i - b_{i-1})$.

Como $b_0 = a$ e $b_k = t$ tem-se $F(b_k) = F(t)$ e $F(b_0) = F(a)$. Se $F(a) = 0$, tem-se

$$F(b_1) - F(b_0) + F(b_2) - F(b_1) + ... + F(b_k) - F(b_{k-1}) = F(t) - F(a) = F(t).$$

Logo, somando as desigualdades (vii) obtemos (viii) abaixo.

viii) $h_1(b_1 - b_0) + ... + h_k(b_k - b_{k-1}) \leq F(t) \leq H_1(b_1 - b_0) + ... + H_k(b_k - b_{k-1})$.

Simplificações legítimas: O 1º e o 3º membros de (viii) são exemplos de somas de Riemann que serão definidas a seguir. A abordagem clássica contextualiza estas somas em áreas, o que dificulta o uso da integral em outras situações. Este é o caso de volume, comprimento e medidas em geral. A extensão *produto* $\rightarrow$ *soma de Rimann* usada nesta oficina dá origem a simplificações legítimas em Cálculo como vimos em 3.(viii) e 3.(x). Isto ocorre porque o conceito “produto” é mais geral que o conceito “área”. De fato, área é um tipo especial de produto.

7 – SOMAS DE RIEMANN

As somas r_p e R_p abaixo são conhecidas, respectivamente, como *soma de Riemann minorante e soma de Riemann majorante* da função f, associadas à partição p.

$r_p = h_1(b_1 - b_0) + ... + h_k(b_k - b_{k-1})$ e $R_p = H_1(b_1 - b_0) + ...+ H_k(b_k - b_{k-1})$.

Como para todo i, $h_i \leq H_i$, tem-se $r_p \leq R_p$. Se existir uma extensão do produto F associada a f, com $F(a) = 0$, segue-se que r_p e R_p são aproximações para $F(t)$, pois

i) $r_p \leq F(t) \leq R_p$.

ii) Observação: Se $t = a$, a única partição de $[a, t] = [a, a] = \{a\}$ é $\{a\}$ e, neste caso, *as únicas somas de Riemann são* $r_{\{a\}} = R_{\{a\}} = f(a)(a - a) = 0$.

iii) Refinamento: Dadas duas partições n e p de $[a, t]$, diremos n *refina* p, se $p \subset n$.

iv) Lema: *Se n e p forem partições de* $[a, t]$ *tais que n refina p, então* $r_p \leq r_n \leq R_n \leq R_p$.

Prova: Corrente na literatura.

v) Corolário: *Se p e q forem partições de* $[a, t]$ *então* $r_q \leq R_p$.

Prova: A união $n = p \cup q$ refina p e q, pois $p \subset n$ e $q \subset n$. Segue-se da desigualdade $r_p \leq R_p$ e do lema (iv) que $r_q \leq r_n \leq R_n \leq R_p$. Isto é, $r_q \leq R_p$. *Cqd*.

Números $r(a, t)$, $R(a, t)$: Tomemos os conjuntos numéricos abaixo.

vi) $r = \{r_p;\ p \text{ é partição de } [a, t]\}$ e $R = \{R_p;\ p \text{ é partição de } [a, t]\}$.

Vimos no corolário (v) que quaisquer que sejam as partições p, q de $[a, t]$ tem-se $r_q \leq R_p$. Esta desigualdade mostra que R_p é cota superior para r e r_q é cota inferior para R. Como r e R não são vazios, existem o supremo e o ínfimo abaixo.

vii) $r(a, t) = sup r$ e $R(a, t) = inf R$.

Se p, q forem partições de $[a, t]$ segue-se que $r_q \in r$, logo $r_q \leq r(a, t) = sup r$. Analogamente, $R(a, t) \leq R_p$. Como $r_q \leq R_p$ segue-se que r_q é cota inferior para R. Logo $r_q \leq R(a, t)$. Isto mostra que $R(a, t)$ é cota superior para r, o que obriga a desigualdade $r(a, t) \leq R(a, t)$. Estes fatos mostram que as desigualdades abaixo são válidas.

viii) $r_q \leq r(a, t) \leq R(a, t) \leq R_p$.

Funções F_r e F_R: Denotando $F_r(t) = r(a, t)$ e $F_R(t) = R(a, t)$ obtemos funções F_r e F_R definidas nos pontos $t \geq a$, em D_f. Se tomarmos $t = a$, segue-se que $F_r(a) = r(a, a) = F_R(a) = R(a, a) = 0$. As desigualdades (viii) podem ser escritas como (ix) abaixo.

xi) $r_p \leq F_r(t) \leq F_R(t) \leq R_p$, se $t \geq a$.

x) Proposição: *Se f for limitada em* $[a, t]$ *e* $s \in [a, t]$, *então valem as igualdades abaixo.*

$R(a, t) = R(a, s) + R(s, t)$; $r(a, t) = r(a, s) + r(s, t)$;

$F_R(t) - F_R(s) = R(s, t)$ *e* $F_r(t) - F_r(s) = r(s, t)$.

Prova: Dada uma partição q em $[a, t]$, a partição $p = q \cup \{s\}$ refina q. Logo $R_q(a, t) \geq R_p(a, t)$. Isto significa que para determinar o ínfimo $R(a, t)$, basta considerar as partições que contenham s. Isto é,

xi) $R(a, t) = inf\ \{R_p;\ p$ *é partição de* $[a, t]$ *e* $s \in p\}$.

Por outro lado, é fácil ver que uma partição p de $[a, t]$ satisfaz a condição $s \in p$ se, e somente se, $p = p_1 \cup p_2$ onde p_1 é partição de $[a, s]$ e p_2 é partição de $[s, t]$. Como $[a, s]$ e $[s, t]$ são sub-conjuntos de $[a, t]$ e como f é limitada em $[a, t]$, segue-se que f é limitada em $[a, s]$ e em $[s, t]$. Conseqüentemente para quaisquer partições p_1 e p_2 como acima, as somas R_{p1} e R_{p2} estão definidas. Nestas condições vale a igualdade

$R_p = R_{p1} + R_{p2}$.

Esta igualdade permite escrever (xi) como abaixo.

xii) $R(a, t) = inf\ \{R_{p1} + R_{p2};\ p_1$ *é partição de* $[a, s]$ *e* p_2 *é partição de* $[s, t]\}$.

Tomemos os conjuntos A e B abaixo.

$A = \{R_{p1};\ p_1$ *é partição de* $[a, s]\}$; $B = \{R_{p2};\ p_2$ *é partição de* $[s, t]\}$.

A igualdade (xii) pode ser escrita em termos do conjunto soma $A + B$ como em (iv).

xiii) $R(a, t) = inf\,(A + B)$.

Como f é limitada em $[a, s]$ e em $[s, t]$, vemos que existem os ínfimos

$R(a, s) = inf\ A = inf\ \{R_{p1};\ p_1$ *é partição de* $[a, s]\}$

e

$R(s, t) = inf\ B = inf\ \{R_{p2};\ p_2$ *é partição de* $[s, t]\}$.

Como $inf(A + B) = inf(A) + inf(B)$ segue-se de (iv) que

xiv) $R(a, t) = R(a, s) + R(s, t)$.

Isto mostra a 1ª igualdade da proposição. Como $R(a, t) = F_R(t)$ e $R(a, s) = F_R(s)$ a igualdade (xiv) se escreve como $F_R(t) - F_R(s) = R(s, t)$, o que mostra a 3ª igualdade. As provas das outras igualdades são similares. *Cqd.*

8 – EXTENSÕES DO PRODUTO

Nosso próximo passo é estender as funções F_r e F_R aos números menores que a, para transformá-las em extensões do produto associadas a f.

i) Para estender F_r, F_R aos números menores que a vamos admitir que o domínio D_f seja um intervalo generalizado (i.e, D_f é conexo na reta real). Fixemos $a \in D_f$ e tomemos as funções abaixo.

$F_r(t) = r(a, t)$ se $t \geq a$; $F_r(t) = -r(a, t)$ se $t < a$;

$F_R(t) = R(a, t)$ se $t \geq a$; $F_R(t) = -R(a, t)$ se $t < a$.

ii) Lema: *Se* $s < t \in D_f$, *então* $F_r(t) - F_r(s) = r(s, t)$ *e* $F_R(t) - F_R(s) = R(s, t)$.

Prova: Se $a \leq s < t$ a proposição 7(x) mostra que as igualdades acima são verdadeiras. Se $s < a \leq t$ o lema (i) e a definição (vi) mostram as igualdades abaixo.

$R(s, t) = R(s, a) + R(a, t) = F_R(t) - F_R(s)$.

No caso $s < t < a$, a proposição 7(x) assegura que

$R(s, a) = R(s, t) + R(t, a)$ e que $-R(t, a) + R(s, a) = R(s, t)$.

Como $-R(a, t) = F_R(t) =$ e $R(s, a) = -F_R(s)$, segue-se que

$F_R(t) - F_R(s) = R(s, t)$.

O que vimos acima mostra que a 2ª igualdade do lema (ii) é verdadeira. A prova da 1ª igualdade é similar. *Cqd*.

iii) Tomando $s < t$ em D_f e a partição $e = \{s, t\}$, segue-se que $r_e \leq r(s, t) \leq R_e$ e $r_e \leq R(s, t) \leq R_e$. Usando o lema (ii) nestas desigualdades obtemos

$r_e \leq F_r(t) - F_r(s) \leq R_e$ e $r_e \leq F_R(t) - F_R(s) \leq R_e$.

iv) Teorema: *Seja uma função f definida em um intervalo generalizado* D_f *e fixemos um número* $a \in D_f$. *Se f for limitada em todos os intervalos fechados* $I \subset D_f$, *então as funções* F_R *e* F_r *são extensões do produto associadas a f*.

Prova: Sejam $s < t \in D_f$ e tomemos números reais m e M tais que para todo $x \in [s, t]$, $m \leq f(x) \leq M$. Neste caso, os números

$H = sup\{f(x); x \in [s, t]\}$ e $h = inf\{f(x); x \in [s, t]\}$

satisfazem as desigualdades $m \leq h \leq H \leq M$. Logo a partição $e = \{s, t\}$ de $[s, t]$ satisfaz as condições $m(t - s) \leq h(t - s) = r_e$. Isto é,

i) $m(t - s) \leq r_e$ e, analogamente, $R_e \leq M(t - s)$.

Levando estas igualdades em (iii) segue-se que

$$m(t - s) \le r_e \le F_r(t) - F_r(s) \le R_e \le M(t - s)$$

e que

$$m(t - s) \le F_r(t) - F_r(s) \le M(t - s).$$

Isto mostra que F_r é uma extensão do produto associada a f. O caso F_R é similar. *Cqd*.

9 - TODA FUNÇÃO CONTÍNUA TEM PRIMITIVA; Prova sem continuidade uniforme

i) Teorema: *Se f for uma função contínua definida em um intervalo generalizado aberto, então f admite primitiva*.

Prova: Como f é contínua segue-se que f é limitada em todos os intervalos fechados contidos em D_f. Logo, para $a \in D_f$ fixado, pode-se definir as funções F_R e F_r que são extensões do produto associadas a f. Como f é contínua, segue-se do teorema da extensão do produto que F_R e F_r são primitivas de f. *Cqd*.

i) Consequências: Como o domínio D_f é um intervalo generalizado, segue-se que $F_R - F_r =$ *constante*. Como $F_R(a) = F_r(a) = 0$ segue-se que $F_R = F_r = F$ *é a única primitiva de f que se anula em a*. Se G for uma extensão do produto que se anula em a, segue-se do teorema da extensão do produto que G é primitiva de f, o que pela igualdade $G(a) = 0$ mostra que $G = F$. Logo F *é a única extensão do produto associada a f que se anula em a*.

ii) Aplicação; arco seno: Explicitando x na equação da semi-circunferência $x^2 + y^2 = 1$, $x \ge 0$, tem-se $x = (1 - y^2)^{1/2} = f(y)$. Isto mostra que esta semi-circunferência é o gráfico $(f(y), y)$. Cálculos diretos mostram que

$$[1 + f'(y)^2]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Como o 2º membro da expressão acima é uma função contínua, o teorema (i) mostra que esta função tem uma primitiva e, consequentemente, podemos calcular sua integral. Esta integral é o comprimento do arco s da circunferência entre $y = 0$ e $y = t$. Isto é.

$$s = \int_0^t \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}}.$$

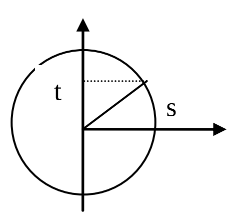


Fig.6.

Como o seno do arco s é a ordenada de sua extremidade (fig.6), segue-se que $sen s = t$ e que $s =$ arco cujo seno é t; isto é,

$$ar\ sen t = \int_0^t \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}}.$$

É imediato que a derivada do arco seno é $\dfrac{d}{dt}\ ar\ sen t = \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^t \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

Simplificação legítima: O arco seno e sua derivada foram obtidos de forma mais simples que a usual. Esta simplicidade permite que em um curso de Cálculo, o assunto seja antecipado o que possibilita seu uso na apresentação do arco-seno. Isto simplifica as funções trigonométricas inversas, por dar a elas uma sólida abordagem geométrica. Por outro lado, as funções definidas por uma integral surgirão pela primeira com o arco-seno, com forte respaldo geométrico no comprimento da circunferência.

Função definida por integral: Generalizando as idéias acima, se f for uma função contínua e D_f for um intervalo generalizado, fixando $a \in D_f$, pode-se definir em D_f a função em (iii) abaixo. Este é um recurso largamente usado em Matemática.

iii) $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(x)\,dx$. Um exemplo é o logaritmo $Ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dx}{x}$, $x > 0$, $|x| < 1$.

10 - FUNÇÃO INTEGRÁVEL

Seja f uma função limitada num intervalo fechado de extremos a e t. Diz-se que f é *integrável* entre a e t se $F_R(t) = F_r(t) = F(t)$. Neste caso, usa-se a notação abaixo.

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx.$$

Se f for integrável entre a e t e s estiver entre a e t, é imediato que f é integrável entre a e s e entre s e t. Além disso,

$$\int_a^t f(x)dx = \int_a^s f(x)dx + \int_s^t f(x)dx.$$

O teorema 9.(i) e seus desdobramentos mostram que *toda função contínua é integrável*. Muitos autores usam este enunciado para o teorema 9.(i).

i) Proposição: *Seja f uma função limitada em todos os intervalos fechados em D_f. Se F for uma extensão do produto associada a f tal que $F(a) = 0$, então para todo $t \in D_f$,*

$F_R(t) \geq F(t) \geq F_r(t)$ *se* $t \geq a$ *e* $F_R(t) \leq F(t) \leq F_r(t)$ *se* $t \leq a$.

Em particular, $F_R(t) \geq F_r(t)$ se $t \geq a$ e $F_R(t) \leq F_r(t)$ se $t \leq a$.

Prova: Mostraremos que se F não satisfizer as desigualdades, então F não é extensão do produto associada a f. Consideremos o caso em que existe $b > a$ tais que $F(b) > F_R(b)$. Os outros casos são similares. Como $F(b) > F_R(b)$, existe uma partição $p = \{a = b_0, b_1, ..., b_k = b\}$ para $[a, b]$ tal que $F_R(b) \leq R_p(a, b) < F(b)$, onde $R_p(a, b) = H_1(b_1 - a) + H_2(b_2 - b_1) + \ldots + H_k(b - b_{k-1})$. Como $F(a) = 0$, podemos escrever

$$F(b) = [F(b_1) - F(a)] + [F(b_2) - F(b_1)] + \ldots + [F(b) - F(b_{k-1})].$$

Logo, a desigualdade $R_p(a, b) < F(b)$ implica na existência de j entre 1 e k tal que $H_j(b_j - b_{j-1}) < F(b_j) - F(b_{j-1})$. Tomando

$$M = \frac{H_j}{2} + \frac{F(b_j) - F(b_{j-i})}{2(b_j - b_{j-i})},$$

tem-se

$$M(b_j - b_{j-1}) = \frac{H_j(b_j - b_{j-1}) + F(b_j) - F(b_{j-1})}{2} < F(b_j) - F(b_{j-1}).$$

Como $M > H_j = sup\{f(x);\ x \in [b_{j-1}, b_j]\}$, segue-se que F não é extensão do produto associada a f. *Cqd*.

ii) Caracterização da integral como extensão do produto: Decorre de (i) que se f for integrável, então a única extensão do produto associada a f que se anula em a é:

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx.$$

BIBLIOGRAFIA

Macêdo, Arnaldo (2001) – Modelo Matemático Motivador para Estudantes de Administração. Dissertação de Mestrado, Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro, 2001.

Valladares, Renato J. Costa (2003) - Matemática Cultural: Um Método de Ensino e Aprendizagem. Educação Matemática em Revista nº 13, 2003.

Valladares, Renato J. Costa (2008) – Cálculo e Aplicações I. Editora Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2008.

Valladares, Renato J. Costa (2010) – Cálculo e Aplicações II. Editora Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2010.