Funções Trigonométricas e Análise de Fourier

Humberto José Bortolossi[a], *Wanderley Moura Rezende*[b], *Dirce Uesu Pesco*[c]

[a] Universidade Federal Fluminense, *Email:* hjbortol@vm.uff.br

[b] Universidade Federal Fluminense

[c] Universidade Federal Fluminense

Nesta oficina, vamos explorar as ideias básicas que compõem a *Análise de Fourier*, um *saber matemático* que tem várias aplicações em diversas áreas e profissões. A *Análise de Fourier* é usada no estudo de *sinais*: funções que trazem consigo informações sobre o comportamento ou a natureza de um fenômeno que varia com o tempo ou com o espaço. Sons são exemplos de fenômenos que geram sinais: ondas sonoras produzem variações de pressão cujos valores mudam com o tempo. Esses valores podem ser convertidos em sinais elétricos através de um microfone. Um computador pode então converter esses sinais elétricos em números e exibir o gráfico do sinal correspondente (Figura 1).

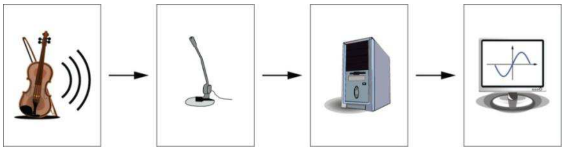


Figura 1 — Sinal acústico gerado pelo som de um violino.

Entre os (muitos) exemplos de fenômenos que geram sinais, destacamos: os batimentos do coração (um sinal bioelétrico descrito por um eletrocardiograma), as fotografias digitais (a intensidade luminosa da fotografia varia de acordo com a posição do pixel da imagem digital), as ondas sísmicas produzidas por um terremoto, as vibrações moleculares em uma amostra química radiada por luz infravermelha e as variações no valor de uma ação na bolsa de valores.

A importância e a abrangência desse saber podem ser percebidas pelos seguintes fatos [5]: o trabalho científico de matemática mais citado de todos os tempos trata justamente da Análise de Fourier; aproximadamente 3/4 dos prêmios Nobel em Física foram ganhos por trabalhos feitos usando-se ferramentas e conceitos da Análise de Fourier; o prêmio Nobel de Química de 1985 e os prêmios Nobel de Medicina de 1962, 1979 e 2003 também estão relacionados com a Análise de Fourier.

Para o caso de fenômenos periódicos, a ideia básica da Análise de Fourier é a seguinte: sinais periódicos podem ser aproximados por somas de funções trigonométricas da forma $y = A \operatorname{sen}(B x + C)$, com A, B e C constantes. É justamente esse princípio que vamos investigar aqui, usando, para isso, experimentos sonoros. Veremos como os parâmetros A, B e C afetam o gráfico da função $y = A \operatorname{sen}(B x + C)$ e as propriedades do som correspondente e, também, como somas de funções desse tipo podem ser usadas para representar sons mais complexos.

SOBRE A NATUREZA DO SOM

O Experimento da Vela e do Alto-Falante.

(a) Considere o seguinte experimento: em um laboratório sem correntes de ar, uma vela acesa é colocada em frente a um alto-falante que, então, reproduz um som grave com volume e altura constantes (Figura 2). Descreva, no seu caderno, o movimento que a chama da vela irá fazer.

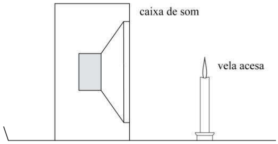


Figura 2 — Esquema para o experimento da vela e do alto-falante.

(b) Acesse a página <http://www.uff.br/cdme/iat/adf/> e, então, clique no *link* “Vídeos: experimento com alto-falante e chama de vela”. Você poderá assistir a duas gravações do experimento descrito no item (a). Descreva, no seu caderno, o movimento da chama da vela nessas gravações. Esse movimento é compatível com a resposta que você deu no item (a)?

(c) Os vídeos da Etapa 2 mostram que, nas condições descritas no experimento do item (a), a chama da vela irá oscilar. Estudos mostram que as pessoas não têm uma percepção correta sobre a natureza do som e que, em geral, elas fornecem descrições erradas para o movimento da chama da vela no experimento do item (a) [8]. Uma descrição errada típica é a de que a chama ficará sempre pendendo para um único lado enquanto o alto-falante estiver emitindo som. Em Física, o som é uma onda mecânica longitudinal que é percebida pelos nossos ouvidos e interpretada pelo nosso cérebro. Trata-se de uma *onda*, pois o som é um fenômeno associado ao transporte de energia através de vibrações; *mecânica*, pois as vibrações ocorrem em partículas em um meio material (as moléculas do ar ou de uma parede vibram para transmitir o som); *longitudinal*, pois a direção de transporte é paralela à direção de vibração.

Existem duas maneiras principais de se classificar ondas: com relação à sua natureza e com relação à sua direção de vibração. Com relação à sua natureza, uma onda pode ser mecânica (quando está relacionada com vibrações de partículas em um meio material) ou eletromagnética (quando está relacionada com vibrações dos campos elétrico e magnético). São exemplos de ondas mecânicas: ondas sonoras (incluindo ultrassom), ondas sísmicas e ondas marítimas superficiais. São exemplos de ondas eletromagnéticas: ondas de rádio, micro-ondas, luz visível, luz ultravioleta, raios X, raios gama e ondas de radar. Com relação à sua direção de vibração, uma onda pode ser longitudinal (quando a direção das vibrações é paralela à direção de transporte) ou transversal (quando a direção das vibrações é perpendicular à direção de transporte). São exemplos de ondas longitudinais: ondas sonoras e ondas sísmicas primárias. São exemplos de ondas transversais: ondas marítimas superficiais, ondas sísmicas secundárias e as ondas eletromagnéticas no vácuo. Você pode usar uma dessas molas plásticas de brinquedo para visualizar ondas mecânicas transversais e longitudinais: sobre uma mesa, prenda uma das extremidades da mola (ou peça para alguém segurá-la). Se você movimentar a outra extremidade para os lados (Figura 3 (A)), a onda produzida será longitudinal. Por outro lado, se você movimentar a extremidade solta para frente (Figura 3 (B)) e para trás, a onda produzida será transversal.

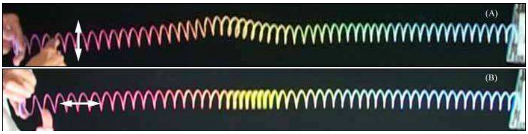


Figura 3 — Ondas mecânicas transversais e longitudinais em uma mola

Curiosidade. Um grupo de professores e alunos da *University of West Georgia* em parceria com a NASA está investigando o uso de ondas sonoras no combate aos incêndios. O uso dessa tecnologia tem vantagens com relação ao uso tradicional da água: documentos, móveis, carpetes não são destruídos. O assunto também foi abordado no programa de divulgação científica *MythBusters* (Caçadores de Mitos) do Canal Discovery que, no episódio 76, comprovou o fato de uma voz amplificada ser capaz de apagar a chama de uma vela e de geradores de sons poderem apagar chamas de propano.

SOM E FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Etapa 1. Como funções trigonométricas estão relacionas com ondas sonoras? O ponto chave é observar que as funções trigonométricas podem ser usadas para modelar vibrações. Para perceber essa conexão, acesse a página <http://www.uff.br/cdme/iat/adf/> e, em seguida, clique no *link* "Software: vibrações de partículas e funções trigonométricas". Você poderá então interagir com um programa que simula, de forma alegórica, as vibrações de partículas. Clique no botão "Animar" para iniciar a animação. Para reiniciá-la, clique no botão "Início" e, então, novamente no botão "Animar".

(a) No aplicativo, existem dois controles que regulam as vibrações das partículas: "Amplitude" e "Frequência". Clique e arraste as bolinhas pretas para mudar os valores desses parâmetros. Descreva, no seu caderno, quais são os efeitos desses controles no movimento das partículas.

(b) No aplicativo, você pode acompanhar a evolução de uma frente de onda clicando no botão "Acompanhar Frente de Onda". Se você ficar clicando repetidamente e rapidamente esse botão, várias frentes de onda sucessivas serão desenhadas. Observe que uma frente de onda, depois de criada, leva um determinado tempo para "sair" pelo lado direito do aplicativo. *Situação 1 (registre a resposta em seu caderno):* os valores dos parâmetros "Frequência" e "Amplitude" alteram esse tempo? *Situação 2 (registre a resposta em seu caderno):* gere várias frentes de onda sucessivas e, durante um intervalo de tempo de 5 segundos, conte quantas frentes "saem" pelo lado direito do aplicativo. Esse número muda quando os valores dos parâmetros "Frequência" e "Amplitude" são alterados? Dê uma descrição!

(c) Clique no botão "Reiniciar!" que está acima da janela principal do aplicativo (para retorná-lo para sua configuração inicial) e, então, clique no botão "Animar" para iniciar a animação. É importante observar que, apesar das frentes de ondas se deslocarem sempre para o lado direito, *o mesmo não ocorre com as partículas*! De fato, elas ficam oscilando em torno da sua posição inicial. É exatamente aqui que ocorre a conexão com funções trigonométricas: elas são usadas para descrever os valores dos deslocamentos relativos da partícula com relação à sua posição inicial em função do tempo! Para visualizar esse fato, ative a opção "Visualizar movimento relativo de uma partícula". Note que, quando a partícula está à direita de sua posição inicial, o deslocamento relativo é positivo e que, quando a partícula está à esquerda da posição inicial, o deslocamento relativo é negativo. *Pergunta (registre a resposta em seu caderno):* Como os valores dos parâmetros “Frequência” e “Amplitude” alteram o gráfico da função trigonométrica? Dê uma descrição.

De forma equivalente, ao invés de descrever os deslocamentos relativos de uma partícula vibrante, as funções trigonométricas também podem ser usadas para descrever a distribuição da pressão do ar ao longo da onda: regiões de alta pressão correspondem às áreas onde as partículas (moléculas do ar) estão mais próximas uma das outras, enquanto que as regiões de baixa pressão correspondem às áreas onde as partículas estão mais afastadas (Figura 4). São essas variações na pressão do ar que fazem as membranas do tímpano de nossos ouvidos vibrarem.

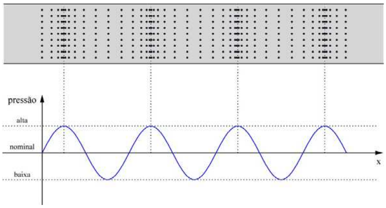


Figura 4 — Funções trigonométricas e a distribuição de pressão ao longo da onda.

Etapa 2. Uma pessoa está movendo a extremidade de uma corda para cima e para baixo, criando um pulso que se move para uma parede onde a outra extremidade da corda está fixada (Figura 5). O pulso leva T segundos para viajar da mão da pessoa para a parede. O que essa pessoa poderia fazer para diminuir o tempo T necessário para o pulso atingir a parede? Explique!

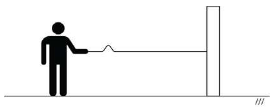


Figura 5 — Imagem alegórica para o problema da corda.

É importante ter em mente que, em ondas mecânicas, as partículas se movimentam, mas elas *não são* transportadas ao longo da onda: elas ficam oscilando! Por exemplo, nas ondas sobre a superfície de um lago, as partículas de água sobem e descem, mas elas não são transportadas na direção das frentes de ondas. Se um inseto estiver em repouso sobre a superfície de um lago, ondas irão fazê-lo subir e descer, mas elas não irão transportá-lo horizontalmente (Figura 6). Ondas transportam energia sem transportar matéria.

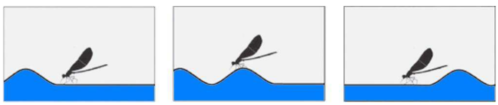


Figura 6 — Ondas transportam energia sem transportar matéria.

Etapa 3: Elementos Básicos de Uma Onda Senoidal. Uma das ondas mais simples é a onda senoidal: aquela que é descrita por uma função do tipo $y = f(x) = A\ \mathrm{sen}(B\,x + C)$.

(a) O parâmetro A é denominado *amplitude* da onda. Ele determina o valor máximo $|A|$ e o valor mínimo $-|A|$ da função f. Atividade: acesse a página <http://www.uff.br/cdme/iat/adf/> e, em seguida, clique no *link* “Software: elementos básicos de uma onda senoidal (parâmetro A)”. Nessa atividade você poderá comparar os gráficos das funções $y = \text{sen}(x)$ e $y = f(x) = A\ \text{sen}(x)$, onde o valor do parâmetro A pode ser modificado (para isso, clique e arraste a bolinha preta de nome A). Note que, nesse caso, $B = 1$ e $C = 0$. Perguntas: (1) O que acontece com o gráfico da função f quando $A = 0$? (2) O que acontece com o gráfico da função f quando $A = -1$?

(b) O parâmetro B está relacionado com a *frequência* da onda. De fato: observe que se $A = 1$, $B = 1$ e $C = 0$, então $y = \text{sen}(x)$ é uma função periódica de período $T = 2\pi$. Se considerarmos que x representa o tempo medido em segundos, então os valores de $y = \text{sen}(x)$ se repetem a cada 2π segundos, isto é, os valores de $y = \text{sen}(x)$ completam um ciclo a cada 2π segundos. Assim, a frequência associada é igual a $F = 1/T = 1/(2\pi)$ ciclos/segundo $= 1/(2\pi)$ Hz. Se $B = 2$, então os valores de $y = \text{sen}(2\ x)$ completam um ciclo a cada $T = \pi$ segundos e, portanto, a frequência associada é igual a $F = 1/T = 1/\pi$ Hz. Se $B = 1/2$, então os valores de $y = \text{sen}((1/2)\ x)$ completam um ciclo a cada $T = 4\ \pi$ segundos e, portanto, a frequência associada é igual a $F = 1/T = 1/(4\ \pi)$ Hz. Mais geralmente, os valores de $y = \text{sen}(B\ x)$ completam um ciclo a cada $T = 2\ \pi/B$ segundos e, portanto, a frequência associada é igual a $F = 1/T = B/(2\ \pi)$ Hz. Em particular, se $B = 2\ \pi\ k$, então $T = 1/k$ e $F = 1/T = k$ Hz. Atividade: acesse a página <http://www.uff.br/cdme/iat/adf/> e, em seguida, clique no *link* “Software: elementos básicos de uma onda senoidal (parâmetro B)”. Nessa atividade você poderá comparar os gráficos das funções $y = \text{sen}(x)$ e $y = f(x) = \text{sen}(B\ x)$, onde o valor do parâmetro B pode ser modificado (para isso, clique e arraste a bolinha preta de nome B). Note que, nesse caso, $A = 1$ e $C = 0$. Perguntas: (1) O que acontece com o gráfico da função f quando $B = 0$? (2) O que acontece com o gráfico da função f quando $B = -1$?

(c) O parâmetro C está relacionado com a *fase* da onda. De fato: observe que se $A = 1$, $B = 1$ e $C = 0$, então os zeros da função $y = \text{sen}(x)$ são dados pelos números $k\ \pi$, com k um número inteiro. Se $C = 1$, então os zeros da função $y = \text{sen}(x + C)$ são dados pelos números $k\ \pi - 1$, com k um número inteiro. Se $C = -1$, então os zeros da função $y = \text{sen}(x + C)$ são dados pelos números $k\ \pi + 1$, com k um número inteiro. Mais geralmente, os zeros da função $f(x) = \text{sen}(x + C)$ são dados pelos números $k\ \pi - C$, com k um número inteiro. Mais ainda: o gráfico de f é obtido por uma translação horizontal do gráfico de $y = \text{sen}(x)$ de $|C|$ unidades para a esquerda se $C > 0$ e de $|C|$ unidades para a direita de $C < 0$. Atividade: acesse a página <http://www.uff.br/cdme/iat/adf/> e, em seguida, clique no *link* “Software: elementos básicos de uma onda senoidal (parâmetro C)”. Nessa atividade você poderá comparar os gráficos das funções $y = \text{sen}(x)$ e $y = f(x) = \text{sen}(x + C)$, onde o valor do parâmetro C pode ser modificado (para isso, clique e arraste a bolinha preta de nome C). Note que, nesse caso, $A = 1$ e $B = 1$. Perguntas: (1) Qual é a relação entre o gráfico da função f e o gráfico de $y = \cos(x)$ se $C = \pi/2$? (2) Qual é a relação entre o gráfico da função f e o gráfico de $y = \text{sen}(x)$ se $C = \pi$?

(d) Atividade: acesse a página <http://www.uff.br/cdme/iat/adf/> e, em seguida, clique no *link* “Software: elementos básicos de uma onda senoidal (todos os parâmetros)”. Nessa atividade você poderá comparar os gráficos das funções $y = \text{sen}(x)$ e $y = f(x) = A\ \text{sen}(B\ x + C)$, onde os valores dos parâmetros A, B e C podem ser modificados (para isso, clique e arraste a bolinha preta de nome correspondente).

(e) Atividade: acesse a página <http://www.uff.br/cdme/iat/adf/> e, em seguida, clique no *link* “Software: ouvindo os elementos básicos de uma onda senoidal”. Nessa atividade você poderá ouvir os sons correspondentes às ondas senoidais $y = f(x) = A$ sen$(2\ \pi\ k\ x + C)$, onde o valor da amplitude A, da frequência k (em Hz) e da fase C podem ser modificados. Perguntas: (1) Clique no botão "Reiniciar!" e, então, mude apenas o valor da amplitude da onda (clique e arraste a bolinha preta correspondente). Qual é o efeito dessas mudanças no som? (2) Clique no botão "Reiniciar!" e, então, mude apenas o valor da frequência da onda (clique e arraste a bolinha preta correspondente). Qual é o efeito dessas mudanças no som? (3) Clique no botão "Reiniciar!" e, então, mude apenas o valor da fase da onda (clique e arraste a bolinha preta correspondente). Qual é o efeito dessas mudanças no som?

Etapa 4: Som e Formas. Com os experimentos realizados na etapa anterior, você deve ter percebido (1) que a amplitude de uma onda senoidal determina intensidade (o volume) do som correspondente (quanto maior o módulo $|A|$ da amplitude, maior a intensidade do som); (2) que a frequência k determina a altura (quanto maior a frequência, mas agudo é o som); (3) que o ouvido humano não consegue perceber mudanças na fase de uma onda.

Tipicamente, o sistema auditivo humano só consegue perceber sons cujas frequências estejam entre 64 Hz e 23 kHz (23 000 Hz) aproximadamente (FAY, 1988). Tente fazer um teste usando o software indicado no item (e) da Etapa 3 (o resultado pode variar de pessoa para pessoa, com a idade e com a qualidade do alto-falante). Em comparação, um cão consegue perceber sons com frequências entre 67 Hz e 45 kHz aproximadamente, enquanto que morcegos percebem sons com frequências entre 2 kHz e 110 kHz aproximadamente (FAY, 1988). Como o sistema auditivo humano pode identificar sons com uma grande gama de intensidades, é usual expressar essas intensidades em termos de uma escala logarítmica, o decibel (a décima parte de um bel). Mais precisamente, se I_{ref} é a intensidade sonora mínima que é audível e I_{som} é a intensidade do som em questão, então a medida de I_{som} em decibéis é dada por $\beta = 10\ \log_{10}(I_{som}/I_{ref})$. Como a intensidade I é proporcional ao quadrado do nível de pressão p do som, vale também que $\beta = 20\ \log_{10}(p_{som}/p_{ref})$. Segundo Hewitt (2002), os danos fisiológicos ao ouvido começam a acontecer quando ele é exposto a 85 dB ou mais (uma rebitadora pode gerar sons de 100 dB, uma sirene de alarme próxima, 120 dB, e um avião a jato a 30 m de distância, 140 dB).

Nos experimentos que realizados aqui, a amplitude e a frequência de uma onda senoidal foram sempre constantes. As rádios AM (amplitude modulada) e FM (frequência modulada) transmitem seus sinais modificando os valores da amplitude e da frequência de uma onda portadora (Figura 7).

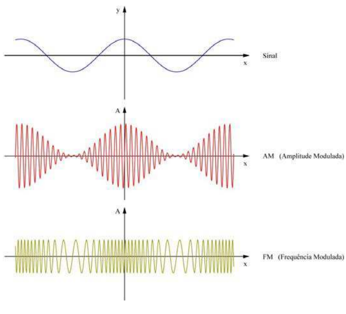


Figura 7 — Amplitude e frequência moduladas.

Como o próprio nome indica, no sistema de amplitude modulada, o valor de um sinal é codificado mudando-se a amplitude da onda portadora (quanto maior o valor do sinal, maior a amplitude). No sistema de frequência modulada, o valor de um sinal é codificado mudando-se a frequência (quanto maior o valor do sinal, maior a frequência). O que o seu aparelho receptor de AM/FM faz é decodificar a onda portadora que ele recebe para obter o sinal transmitido.

É importante diferenciar o som do ponto de vista físico/matemático e o som como ele é percebido pelo cérebro humano (psicofísica). Por exemplo, a intensidade de um som é uma grandeza física que, em sua definição, não depende de quem esteja ouvindo e nem da frequência emitida: ela é proporcional ao quadrado da amplitude da onda. Agora, como essa intensidade é percebida pelo sistema auditivo, o volume do som, depende da pessoa e da frequência. Em audiometria, existe um teste para determinar as curvas de mesmo volume (uma curva de nível): existem sons de intensidade e frequência diferentes que são percebidos como tendo o mesmo volume sonoro. De fato, existem estudos que mostram que nossa percepção sonora pode ser facilmente enganada através de ilusões e paradoxos musicais: o que se toca não é o que se percebe. Para mais detalhes, sugerimos o artigo introdutório (DEUTSCH, 1975).

Etapa 5: Notas Musicais. Cada nota musical pode ser identificada por sua frequência. O quadro abaixo identifica as frequências (em Hz) da oitava central de um piano para uma escala bem temperada em 12 semitons.

Tabela 1 — Frequência em Hz das 12 notas musicais da oitava central de um piano para uma escala bem temperada.

Dó	Dó# Ré♭	Ré	Ré# Mi♭	Mi	Fá	Fá# Sol♭	Sol	Sol# Lá♭	Lá	Lá# Si♭	Si
261,63	277,18	293,66	311,13	329,63	349,23	369,99	392,00	415,30	440,00	466,16	493,88

Para obter as frequências da oitava acima, basta multiplicar as frequências da tabela por 2. Para obter as frequências da oitava abaixo, basta dividir as frequências da tabela por 2. Atividade coletiva: acesse a página <http://www.uff.br/cdme/iat/adf/> e, em seguida, clique no *link* “Software: gerando música através das frequências das notas musicais”. Nesse software você poderá compor ou reproduzir uma música especificando as frequências e duração das notas musicais em uma planilha eletrônica. Usando o software, obtenha as frequências e durações das primeiras notas de uma música popular conhecida de sua escolha. Passe esses valores para um colega, que fará o mesmo com você. Usando o software, seu colega tentará descobrir a sua música e, você, a de seu colega.

SONS MAIS COMPLEXOS: SOMAS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Etapa 1: Soma de Funções. Dados os gráficos de duas funções reais f e g, como obter o gráfico da soma $f + g$? A resposta é dada pela definição de soma de funções reais: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Assim, para cada x real, o valor de $y = (f + g)(x)$ é obtido somando-se os valores $f(x)$ e $g(x)$ (se $f(x) < 0$ ou $g(x) < 0$, a soma é uma subtração). Para visualizar esse processo, acesse a página <http://www.uff.br/cdme/iat/adf/> e, em seguida, clique no *link* “Software: soma de duas funções reais”. Comece com funções simples: $f(x) = 1$ e $g(x) = 2$, depois $f(x) = -1$ e $g(x) = 2$, depois $f(x) = -1$ e $g(x) = 1$, depois $f(x) = 1$ e $g(x) = x$, depois $f(x) = \cos(x)$ e $g(x) = x$. Quem é $f +$

g se $f(x)$ = sen(x) + cos(x) e $g(x)$ = – cos(x)? Observação: no software, a função seno é representada por “sin” e não por “sen”.

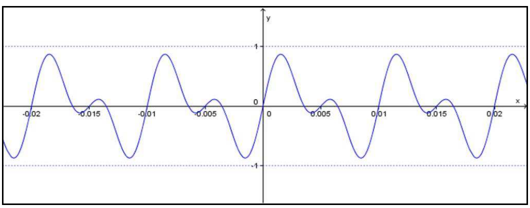
Etapa 2: Superposição de Duas Ondas Sonoras. Acesse a página <http://www.uff.br/cdme/iat/adf/> e, em seguida, clique no *link* “Software: gerando sons mais complexos com a superposição de duas ondas”. Nesse software você poderá modificar as amplitudes (A_1 e A_2), frequências (k_1 e k_2) e fases (C_1 e C_2) de duas sonoras e, então, ouvir o som da superposição correspondente. No que se segue, para indicar o número π, escreva a palavra *pi* ou clique no ícone $\boxed{\alpha}$ para ter acesso a uma lista de símbolos que inclui o número π.

(a) Se $A_1 = 0.5$, $A_2 = 0.5$, $k_1 = 440$, $k_2 = 0$, $C_1 = 0.0$ e $C_2 = 0.0$, como se compara o som da superposição com relação aos sons das ondas componentes individuais?
(b) Se $A_1 = 0.5$, $A_2 = 0.5$, $k_1 = 0$, $k_2 = 440$, $C_1 = 0.0$ e $C_2 = 0.0$, como se compara o som da superposição com relação aos sons das ondas componentes individuais?
(c) Se $A_1 = 0.5$, $A_2 = 0.5$, $k_1 = 440$, $k_2 = 440$, $C_1 = 0.0$ e $C_2 = 0.0$, como se compara o som da superposição com relação aos sons das ondas componentes individuais?
(d) Se $A_1 = 1.0$, $A_2 = 0.9$, $k_1 = 440$, $k_2 = 440$, $C_1 = 0.0$ e $C_2 = \pi$, como se compara o som da superposição com relação aos sons das ondas componentes individuais?
(e) Se $A_1 = 1.0$, $A_2 = 0.1$, $k_1 = 440$, $k_2 = 440$, $C_1 = 0.0$ e $C_2 = \pi$, como se compara o som da superposição com relação aos sons das ondas componentes individuais?
(f) Se $A_1 = 1.0$, $A_2 = 1.0$, $k_1 = 440$, $k_2 = 440$, $C_1 = 0.0$ e $C_2 = \pi$, como se compara o som da superposição com relação aos sons das ondas componentes individuais?

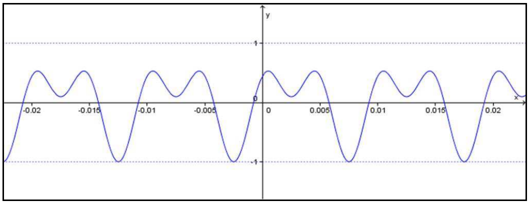
Na situação descrita no item (c), temos o que os físicos chamam de *interferência construtiva*: os efeitos individuais de cada onda se somam e produzem uma onda resultante com amplitude maior (HEWITT, 2002).

Nos itens (d), (e) e (f) temos exemplos de *interferência destrutiva*: o efeito de uma onda diminui o efeito da outra e a onda resultante da superposição tem uma amplitude menor. No item (f) o efeito de uma onda cancela completamente o efeito da outra onda e som algum é produzido.

Etapa 3: Frequências e A Percepção do Som. Acesse a página <http://www.uff.br/cdme/iat/adf/> e, em seguida, clique no *link* “Software: gerando sons mais complexos com a superposição de duas ondas”. Forneça então os seguintes valores para o software: $A_1 = 0.55$, $A_2 = 0.45$, $k_1 = 100$, $k_2 = 200$ e $C_1 = 0.0$. Vamos considerar dois casos: (1) $C_2 = 0$ e (2) $C_2 = \pi$. Ouça os sons correspondentes. Apesar das formas das ondas diferirem nos dois casos (Figura 8), o som percebido é o mesmo. Esse experimento nos mostra que o sistema auditivo humano identifica o som mais pelo conjunto de frequências e amplitudes (o espectro de amplitudes) das ondas senoidais que o compõem do que pela forma da onda superposta resultante.



$A_1 = 0.55$, $A_2 = 0.45$, $k_1 = 100$, $k_2 = 200$, $C_1 = 0.0$, $C_2 = 0.0$



$A_1 = 0.55$, $A_2 = 0.45$, $k_1 = 100$, $k_2 = 200$, $C_1 = 0.0$, $C_2 = \pi$

Figura 8 — Duas ondas de formatos diferentes, mas de mesmo espectro.

Etapa 4: Frequências e Os Tons de Discagem dos Telefones. Os telefones e celulares modernos possuem o sistema de discagem DTMF (*Dual-Tone Multi-Frequency*). Nesse sistema, cada tecla emite um som que é resultante da superposição de duas ondas senoidais, uma de frequência baixa, outra de frequência onda. No link "Software: os tons de discagem dos telefones e celulares" da página <http://www.uff.br/cdme/iat/adf/>, você encontrará quais são as frequências que compõem o som de cada tecla (Figura 9).

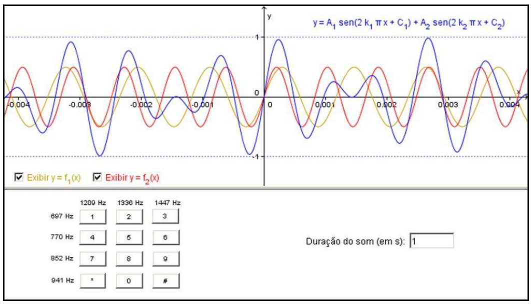


Figura 9 — Simulando os tons de discagem do sistema DTMF dos telefones e celulares.

Ao receber um tom sonoro emitido por um telefone, os equipamentos da central telefônica decodificam as duas frequências que o compõem e, então, identificam qual foi a tecla pressionada. Reflexão: por que os engenheiros decidiram usar *duas* ondas senoidais (duas frequências) no sistema DTMF? Por que não usar apenas uma? Ou três?

Etapa 5: Experimentos com Batimentos. O fenômeno de *batimento* ocorre quando duas ondas senoidais com frequências próximas são superpostas. Considere, por exemplo, as duas ondas senoidais da Figura 10, cujas frequências são 20 Hz e 22 Hz, respectivamente. Pela diferença nas frequências, existem valores de x para os quais as ondas se interferem construtivamente (como na Situação 1 da Figura 10) e valores de x para os quais as ondas se interferem destrutivamente (como na Situação 2 da Figura 10). Assim, a amplitude da onde superposta fica oscilando. Essa oscilação é descrita pela curva envelope (a curva azul pontilhada na Figura 10) e ela é percebida auditivamente através de batimentos. Para verificar esse fato, acesse a página <http://www.uff.br/cdme/iat/adf/> e, em seguida, clique no *link* "Software: experimentos com batimentos". Forneça então os seguintes valores para o software: $A_1 = 0.5$, $A_2 = 0.5$, $k_1 = 60$, $k_2 = 61$, $C_1 = 0.0$ e $C_1 = 0.0$. Ao tocar o som correspondente, você notará um som grave do tipo "*uon*" (1 batimento) a cada 1 segundo. Se você mudar k_2 para 62, então você ouvirá dois sons graves do tipo "*uon*" (2 batimentos) a cada 1 segundo. Experimente!

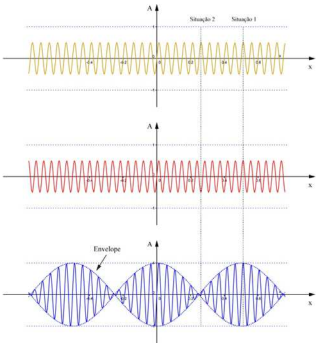


Figura 10 — Batimentos: superposição de duas ondas senoidais com frequências próximas.

De fato, o número de batimentos por segundo é igual ao módulo da diferença das frequências. Para ver isto, considere $A_1 = A_2 = 0.5$, $k_1 = k$, $k_2 = k + \Delta k$ e $C_1 = C_2 = 0.0$, com Δk pequeno. Então

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) + f_2(x) = 0.5 \text{ sen}(2\,\pi\, k\, x) + 0.5 \text{ sen}(2\,\pi\,(k + \Delta k)\, x) \\ &= \cos(2\,\pi\,\Delta k\, x/2) \text{ sen}(2\,\pi\,(k + \Delta k/2)\, x). \end{aligned}$$

Assim, se Δk é pequeno, podemos interpretar a onda f como um sinal de frequência $k + \Delta k/2$ cuja amplitude modula com uma frequência Δk.

Batimentos podem ser usados para afinar um instrumento musical. Por exemplo, para se afinar a nota lá da oitava central do piano, toca-se simultaneamente a tecla correspondente no piano e um diapasão de frequência 440 Hz. Se as cordas do piano para essa tecla estiverem desafinadas, batimentos serão ouvidos.

ANÁLISE DE FOURIER: DECOMPONDO SONS MAIS COMPLEXOS COMO SOMAS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Etapa 1: Análise de Fourier. Do mesmo modo que, através de um prisma, a luz branca visível (uma onda eletromagnética) pode ser decomposta em "luzes puras" identificadas pela frequência (cor), amplitude (intensidade) e fase (Figura 11), ondas sonoras complexas também podem ser decompostas em ondas sonoras senoidais puras. O objetivo da Análise de Fourier é justamente estudar esse processo: dado um som (ou, mais geralmente, um sinal), obter as frequências e amplitudes que o compõem (análise espectral).

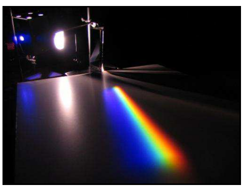


Figura 11 — Decomposição da luz branca através de um prisma.

O experimento realizado na Etapa 3 da seção anterior sugere que o nosso sistema auditivo é capaz de fazer uma “Análise de Fourier”. O nome “Análise de Fourier” é dado em homenagem ao matemático francês Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 —1830) que estabeleceu que funções periódicas podem ser escritas como somas (possivelmente com um número infinito de parcelas) de funções da forma $y = A\ \mathrm{sen}(B\,x + C)$. Não desenvolveremos essa teoria aqui, pois, para isso, precisaríamos de recursos do Cálculo Diferencial e Integral, uma teoria que você, certamente, estudará na universidade caso opte por um curso das áreas de ciências exatas e tecnológicas (Matemática, Física, Química, Estatística, Informática, Ciências da Computação, Engenharias, Geofísica, Geologia, Oceanografia, Metereologia, Tecnologia em Navegação Fluvial, Astronomia). Mesmo cursos como Administração, Contabilidade, Economia, Ciências Atuariais, Arquitetura, Farmácia, Biologia, Biomedicina, Ciência e Tecnologia de Alimentos, Agronomia e Zootecnia estudam o Cálculo Diferencial e Integral. Mesmo sem conhecer Cálculo Diferencial e Integral, você poderá apreciar o resultado estabelecido por Fourier: acesse a página <http://www.uff.br/cdme/iat/adf/> e, em seguida, clique no *link* “Software: aproximando funções periódicas com somas de senos e cossenos”. Neste endereço você poderá definir funções periódicas diferentes e visualizar as diversas aproximações com somas de senos e cossenos (clique e arraste a bolinha preta de nome *n* para mudar o número de parcelas na soma).

Etapa 2: Epiciclos e Interpolação Trigonométrica. No plano cartesiano (ou, se preferir, no plano de Argand-Gauss, usando números complexos), a teoria estabelecida por Fourier pode ser usada para aproximar o traço de curvas planas fechadas e explicar a teoria dos epiciclos, proposta por Apolônio de Perga (Século III a.C.), usada no modelo ptolomaico para o sistema solar. Com esta teoria, é possível construir “sistemas solares” artificiais cujos movimentos produzem órbitas curiosas, como o símbolo do Batman (Figura 12). Para saber mais sobre o assunto, acesse <http://www.uff.br/cdme/epiciclos/>.

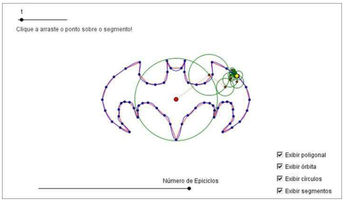


Figura 12 — Imagens do vídeo “Teoria das Supercordas” apresentado por Brian Greene.

Etapa 3: Análise de Fourier. Acesse o seguinte endereço <http://www.uff.br/cdme/iat/adf/> e, em seguida, clique no *link* “Software: Análise de Fourier com O Audacity”. Nessa página você encontrará instruções de como baixar, instalar e usar o Audacity, um software gratuito para a gravação, edição e análise de sons.

(a) Usando o recurso de análise do espectro de frequência do Audacity, descubra quais são as notas que estão sendo tocadas em cada instrumento indicado no link “Software: Análise de Fourier com O Audacity”.
(b) Usando o recurso de análise do espectro de frequência do Audacity, descubra qual é a frequência principal que compõe o sinal de chamada do telefone.
(c) Usando o recurso de análise do espectro de frequência do Audacity, descubra quais são as duas frequências principais que compõem o sinal de ocupado do telefone.

Etapa 4: Teoria das Cordas. Enquanto que nosso estudo aqui se restringiu ao estudo de sons como fenômenos periódicos, a Análise de Fourier tem muitas aplicações em diversas áreas. Para você perceber o poder dessa ideia, indicaremos mais um exemplo: em Física, a Teoria das Supercordas procura explicar todo o universo através de minúsculos filamentos que *vibram* em 11 dimensões. Segundo essa teoria, são as diferentes frequências de oscilação desses filamentos que produzem todos os diversos tipos de matéria, energia e forças (gravitacional, eletromagnética, força nuclear fraca e força nuclear forte) do universo. O vídeo gratuito "Teoria das Supercordas", apresentado pelo físico Brian Greene e promovido pela fundação TED, dá uma excelente introdução ao assunto (Figura 13). Para assistir a esse vídeo com legendas em Português, acesse o endereço

<http://www.ted.com/talks/lang/pt-br/brian_greene_on_string_theory.html>.

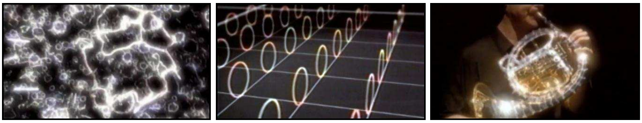


Figura 13 — Imagens do vídeo "Teoria das Supercordas" apresentado por Brian Greene.

Referências

[1] Deutsch, Diana (1975) Musical Illusions. *Scientific American*, **233** (4), 92-104.

[2] Fay, Richard R. (1988) *Hearing in Vertebrates: A Psychophysics Databook*. Hill-Fay Associates.

[3] Hewitt, Paul G. (2002) *Física Conceitual*. Nova Edição. São Paulo: Bookman.

[4] Lima, Elon Lages et al. (2003) *A Matemática do Ensino Médio*. Volume 1. Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

[5] Kammler, David W. (2007) *A First Course in Fourier Analysis*. New York: Cambridge University Press.

[6] Roditi, I. (2005) *Dicionário Houaiss de Física*. Rio de Janeiro: Editora Objetiva.

[7] Sethares, William A. (2005) *Tuning, Timbre, Spectrum, Scale*. *Second Edition*. New York: Springer-Verlag.

[8] Wittmann, Michael C.; Steinberg, Richard N.; Redish, Edward F. (2003) Understanding and Affecting Student Reasoning about Sound Waves, *International Journal of Science Education*, **25** (8), 991-1013.