ESTUDO DAS CÔNICAS POR MEIO DA DEFINIÇÃO UNIFICADA E A UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA©

Juracélio Ferreira Lopes
Instituto Federal de Minas Gerais – Ouro Preto
Juracelio.lopes@ifmg.edu.br

Wladimir Seixas
Universidade Federal de São Carlos
seixas@ufscar.br

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo sobre as cônicas (elipse, hipérbole e parábola) definidas em termos do foco e da reta diretriz utilizando o software Geogebra© para visualizar e investigar os resultados demonstrados.

Palavras-chaves: Geometria Analítica, Cônicas, Coordenadas Polares, Excentricidade, GeoGebra©.

INTRODUÇÃO

A definição das cônicas em termos do foco e da reta diretriz nem sempre é encontrada nos atuais livros de Geometria Analítica e, em alguns casos, apresentam esta abordagem apenas como exercício. Além disso, o conceito de excentricidade é definido nos atuais livros de Geometria Analítica como a razão entre a distância focal e o semi-eixo maior para a elipse ou como a razão entre a distância focal semi-eixo transverso para a hipérbole. Já para o caso das parábolas convencionam-se que todas elas possuem excentricidade igual a 1. Com isso, pode-se perceber facilmente a relação entre excentricidade e a forma da curva para os casos da elipse e hipérbole o que não acontece no caso das parábolas. A partir do tratamento unificado (foco-reta diretriz) é possível determinar uma expressão geral por meio da qual se obtém qualquer uma das cônicas em função do parâmetro excentricidade que possibilita uma discussão mais consistente matematicamente sobre a relação deste parâmetro com a forma destas curvas. Além disto, a expressão geral é de fundamental importância para determinação da equação das cônicas em coordenadas polares facilitando sua aplicação, por exemplo, na obtenção das Leis de Kepler. Estes resultados podem ser visualizados e explorados utilizando o software de geometria dinâmica GeoGebra©, contribuindo para uma melhor compreensão no processo ensino-aprendizagem deste tópico.

DEFINIÇÃO UNIFICADA DAS CÔNICAS

Pode-se dar uma definição geral das cônicas da seguinte forma:

Definição 1. *Dados uma reta r e um ponto F não pertencente à reta. A elipse, a hipérbole e a parábola podem ser definidas como o lugar geométrico dos pontos cuja razão das distâncias ao ponto F e a reta r é uma constante real positiva que depende de cada curva. Esta constante será chamada de* ***excentricidade****. A reta r será chamada de* ***diretriz*** *e o ponto F dado será chamado de* ***foco****.*

Partindo-se da definição 1 pode-se determinar uma única expressão algébrica capaz de representar todas as cônicas.

Considere o sistema de coordenadas cartesianas *xOy*, em que o eixo *Oy* coincida com reta diretriz *r* e o eixo *Ox* seja a reta perpendicular a *r* passando pelo foco *F*. Considere *F* com coordenadas *(2p; 0)*, onde $p > 0$ conforme a figura 1.

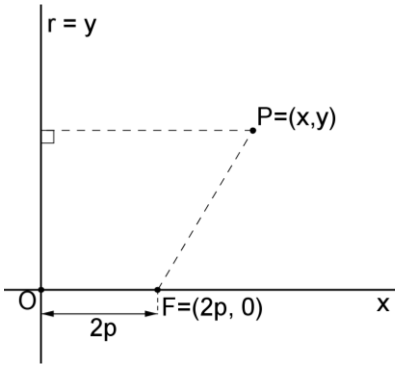

Figura 1: Definição Unificada e plano cartesiano

Seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer sobre qualquer uma das cônicas. Pela definição 1 tem-se que:

$$\frac{d(P,F)}{d(P,r)} = e \qquad (1)$$

onde *e* é a excentricidade da cônica e *d* é a distância euclidiana. Tem-se que $d(P,F) = \sqrt{(x-2p)^2 + y^2}$. Pela figura 1, conclui-se que $d(P,F) = |x|$. Reescrevendo a equação (1) em coordenadas cartesianas obtém-se $\sqrt{(x-2p)^2 + y^2} = e|x|$. Elevando ao quadrado ambos os membros $(x-2p)^2 + y = e^2x^2$,

Expandindo e simplificando

$$(1-e^2)x^2 - 4px + y^2 + 4p^2 = 0 \qquad (2)$$

que é a equação geral de uma cônica dada pela definição 1. Para determinar cada uma das três cônicas serão analisados os valores da excentricidade *e* para $0 < e < 1$, $e = 1$ e $e > 1$.

Caso 1 : $e = 1$

Neste caso a equação (2) torna-se: $-4px + y^2 + 4p^2 = 0.$

Isolando *y* e simplificando,

$$y^2 = 4p(x-p) \qquad (3)$$

Considere um novo sistema de coordenadas $\overline{x}\,\overline{O}\,\overline{y}$ onde $\overline{O}$ é a origem e $\overline{O} = (p,0)$ no sistema xOy. Fazendo a translação do sistema xOy para $\overline{x}\,\overline{O}\,\overline{y}$ tem-se que: $\overline{x} = x - p$ e $\overline{y} = y$

Assim a equação (3) pode ser reescrita como $\overline{y}^2 = 4p\overline{x}$ que é a equação reduzida da parábola no sistema $\overline{x}\,\overline{O}\,\overline{y}$, representada geometricamente na figura 2 .

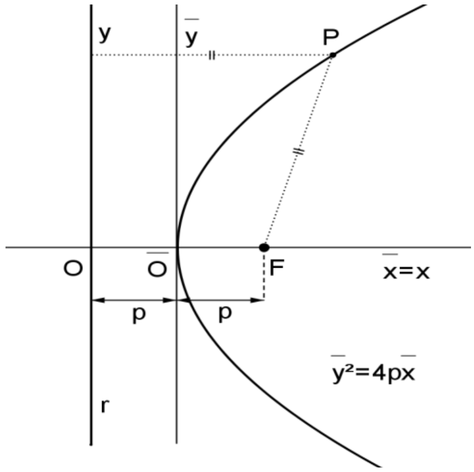

Figura 2:Cônica com excentricidade e=1.

Caso 2: $0 < e < 1$

Para $0 < e < 1$, então $1 - e^2 > 0.$ Dividindo a equação (2) por $1 - e^2$ obtém-se:

$$x^2 - \frac{4p}{1-e^2}x + \frac{y^2}{1-e^2} = -\frac{4p^2}{1-e^2}\ .$$

Completando os quadrados, tem-se

$$x^2 - \frac{4p}{1-e^2}x + \frac{4p^2}{(1-e^2)^2} + \frac{y^2}{1-e^2} = -\frac{4p^2}{1-e^2} + \frac{4p^2}{(1-e^2)^2}$$

Simplificando,

$$\left(x - \frac{2p}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{4p^2e^2}{(1-e^2)^2}\ .$$

Dividindo membro a membro por $\frac{4p^2e^2}{(1-e^2)^2} = \left(\frac{2pe}{1-e^2}\right)^2$. Tem-se,

$$\frac{\left(x - \frac{2p}{1-e^2}\right)^2}{\left(\frac{2pe}{1-e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{4p^2e^2}{1-e^2}} = 1\ ,$$

que pode ser reescrita da forma

$$\frac{\left(x - \frac{2p}{1-e^2}\right)^2}{\left(\frac{2pe}{1-e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{2pe}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2} = 1 \qquad (4)$$

Efetuando a translação para o sistema $\bar{x}\,\bar{O}\,\bar{y}$ com origem $\bar{O} = \left(\frac{2p}{1-e^2}, 0\right)$ dada por

$\bar{x} = x - \frac{2p}{1-e^2}$ **e** $\bar{y} = y$

Definindo $a = \dfrac{2pe}{1-e^2}$ e $b = \dfrac{2pe}{\sqrt{1-e^2}}$ a equação (4) pode ser reescrita como

$$\frac{\overline{x}^2}{a^2} + \frac{\overline{y}^2}{b^2} = 1 \qquad (5)$$

Que é a equação reduzida da elipse no sistema $\overline{x}\,\overline{O}\,\overline{y}$.

Focos e diretrizes da elipse

Após a translação para o sistema $\overline{x}\,\overline{O}\,\overline{y}$ e definindo $F = F_1$ com um dos focos da elipse e $r = r_1$, tem-se:

a) Coordenadas do foco:

$$F_1 = \left(2p - \frac{2p}{1-e^2}, 0\right) = \left(\frac{2pe^2}{1-e^2}, 0\right) = (-ae, 0)$$

b) Equação da diretriz:

$$r_1 : \overline{x} = -\frac{2p}{1-e^2} = -\frac{a}{e}$$

c) Representação Geométrica:

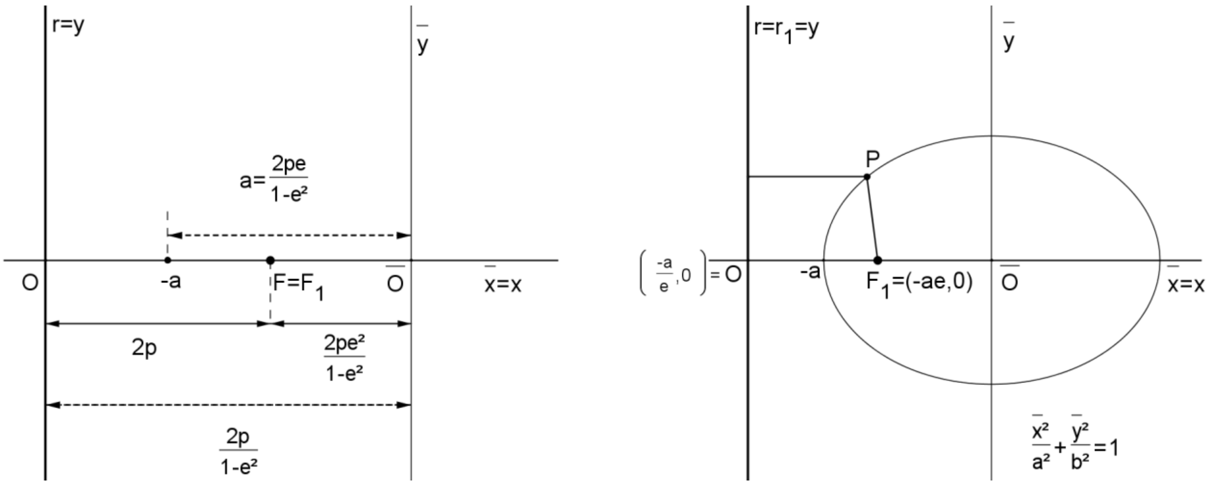

Figura 3: Cônica de excentricidade 0<e<1

Caso 3: $e > 1$

Para $e > 1$, então $e^2 - 1 > 0$. Dividindo a equação (2) por $e^2 - 1$ e invertendo o sinal dos termos de ambos os lados obtém-se:

$$x^2 + \frac{4p}{e^2-1}x - \frac{y^2}{e^2-1} = \frac{4p^2}{e^2-1} .$$

Completando os quadrados, tem-se

$$x^2 + \frac{4p}{e^2-1}x + \frac{4p^2}{(e^2-1)^2} - \frac{y^2}{e^2-1} = \frac{4p^2}{e^2-1} + \frac{4p^2}{(e^2-1)^2}$$

Simplificando,

$$\left(x + \frac{2p}{e^2-1}\right)^2 - \frac{y^2}{e^2-1} = \frac{4p^2e^2}{(e^2-1)^2} .$$

Dividindo membro a membro por

$$\frac{4p^2e^2}{(e^2-1)^2} = \left(\frac{2pe}{e^2-1}\right)^2$$

tem-se,

$$\frac{\left(x+\frac{2p}{e^2-1}\right)^2}{\left(\frac{2pe}{e^2-1}\right)^2} - \frac{y^2}{\frac{4p^2e^2}{e^2-1}} = 1 \,,$$

que pode ser reescrita da forma

$$\frac{\left(x+\frac{2p}{e^2-1}\right)^2}{\left(\frac{2pe}{e^2-1}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{2pe}{\sqrt{e^2-1}}\right)^2} = 1 \tag{6}$$

Efetuando a translação para o sistema $\overline{x}\,\overline{O}\,\overline{y}$ com origem $\overline{O} = \left(-\frac{2p}{e^2-1}, 0\right)$ dada por

$$\overline{x} = x + \frac{2p}{e^2-1} \qquad \text{e} \qquad \overline{y} = y$$

Definindo $a = \frac{2pe}{e^2-1}$ e $b = \frac{2pe}{\sqrt{e^2-1}}$ a equação (6) pode ser reescrita como

$$\frac{\overline{x}^2}{a^2} - \frac{\overline{y}^2}{b^2} = 1 \tag{7}$$

que é a equação reduzida da hipérbole no sistema $\overline{x}\,\overline{O}\,\overline{y}$.

Focos e diretrizes da hipérbole

Definindo $F = F_1$, $r = r_1$ $F = (2p, 0)$ e $r: x = 0$, após a translação para o sistema $\overline{x}\,\overline{O}\,\overline{y}$ tem-se:

a) Coordenadas do foco:

$$F_1 = \left(2p + \frac{2p}{e^2-1}, 0\right) = \left(\frac{2pe^2}{e^2-1}, 0\right) = (ae, 0)$$

b) Equação da diretriz

$$r_1: \overline{x} = \frac{2p}{e^2-1} = \frac{a}{e}$$

c) Representação Geométrica

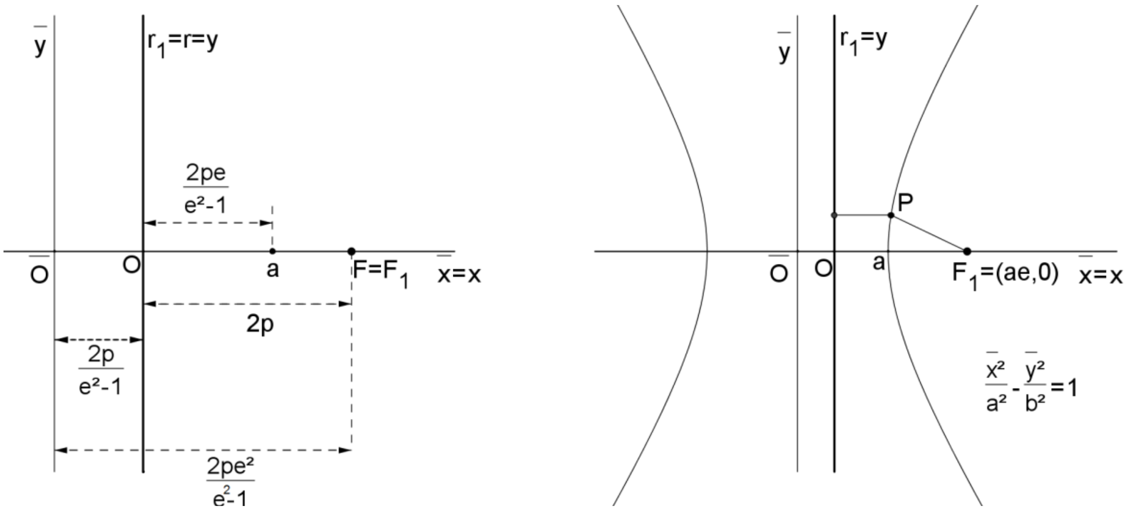

Figura 4:Cônica com excentricidade e>1

A partir dos resultados dos três casos analisados, conclui-se que a equação (2) pode representar uma parábola, elipse ou hipérbole conforme o valor da excentricidade *e* varia. Observa-se que para os casos da elipse e a hipérbole obtém-se uma família de curvas por meio de (2) ou seja, para cada número real no intervalo $0 < e < 1$ determina-se uma elipse e para $e > 1$ uma hipérbole. Observa-se ainda será possível determinar uma única parábola que estará associada a excentricidade 1. Isto é ilustrado na figura 5.

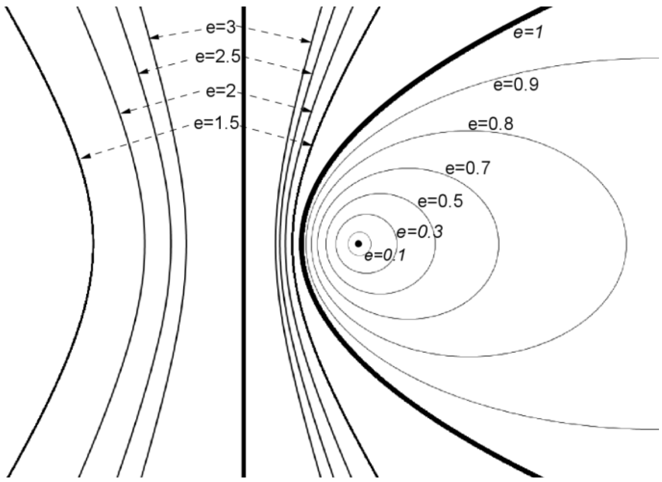

Figura 5: Cônicas segundo valores da excentricidade

A seguir, mostra-se como visualizar estes resultados utilizando o Geogebra©.

Geogebra©: Visualização das cônicas determinadas pela equação geral

Procedimento:

1. Insira na área de trabalho os parâmetros ***e*** e ***p*** através da ferramenta **Seletor**;

2. Configure o intervalo do parâmetro ***e***, colocando valor mínimo de **0.1**. Para isso clique com botão direito do mouse sobre o parâmetro e acesse a opção **Propriedades**;

3. Insira no campo de entrada a expressão a seguir e aperte a tecla **Enter**:

$$(1- e^2)x^2 - 4 * p * x + y^2 + 4 * p^2 = 0$$

4. Aparecerá uma cônica c na área de trabalho, então insira no campo de entrada o comando: **foco[c]**.

5. Altere os valores de *e* arrastando a bolinha sobre o eixo do **Seletor** e observe as curvas geradas para $0 < e < 1$, $e = 1$ e $e > 1$.

6. Clique com botão direito do mouse sobre a curva e marque a opção **Habilitar Rastro** em seguida clique no **Seletor** e marque a opção **Animar.**

Equações das cônicas em coordenadas polares

O sistema de coordenadas polares é de grande utilidade na representação de lugares geométricos, pois simplifica as equações e estudo das curvas determinadas por estes lugares. Além disto, as cônicas dadas em coordenadas polares são de extrema importância para suas diversas aplicações, por exemplo, na obtenção das Leis de Kepler.

Obtenção da Equação polar

Partindo-se da definição 1 que caracteriza as cônicas pela propriedade foco-diretriz é possível obter a equação geral destas curvas em coordenadas polares. De fato, sejam F e d respectivamente o foco e a reta diretriz de uma cônica C qualquer posicionada no sistema cartesiano xOy de forma que d coincida com o eixo y e F possua coordenadas cartesianas $(q, 0)$ onde $q > 0$. Neste mesmo sistema xOy considere o eixo polar $O'x$ numa posição sobre o eixo x tal que o pólo O' se identifique com o foco F conforme ilustra a figura 6.

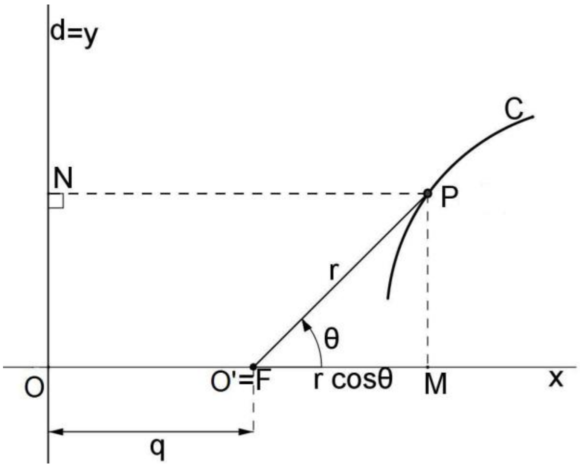

Figura 6: Cônicas em coordenadas polares

Seja P um ponto qualquer da cônica C onde as coordenadas polares de P são $(r;\ \theta)$. Defina $OF = q$. Considerem M e N as projeções ortogonais de P sobre d e $O'x$ respectivamente. É fácil ver que $FM = r\cos\theta$. Pela definição 1 tem-se que:

$$\frac{FP}{PN} = e \tag{8}$$

onde e é a excentricidade da cônica. Na construção dada pela figura 5 observa-se que:

$$FP = r \text{ e } PN = OF + FM = q + r\cos\theta$$

Substituindo na equação (8) obtém-se

$$\frac{r}{q + r\cos\theta} = e$$

onde isolando o valor de r conclui-se que

$$r = \frac{eq}{1 + e\cos\theta}\ ,(\theta \neq 2k\pi, k\ (\ Z\ \textbf{para}\ e = \mathbf{1}) \tag{9}$$

que é a **equação geral das cônicas em coordenadas polares.**

A equação (9) é equivalente a equação (2). De fato, de (9) obtém-se que

$$r - re\ cos\theta = eq \tag{10}$$

Considere o sistema de coordenadas cartesianas $\bar{x}\,\bar{O}\,\bar{y}$ tal que $\bar{O} = O' = F$ e $\bar{x} = x$ conforme ilustra a figura 7.

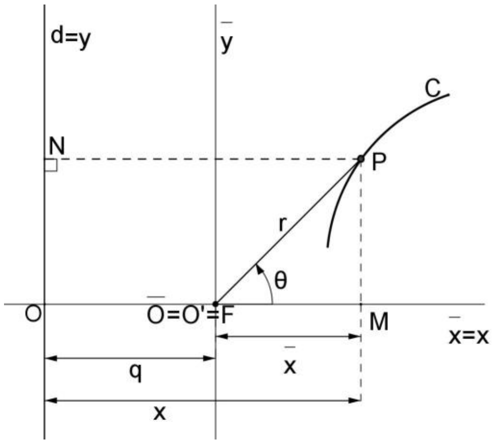

Figura 7: Sistema de coordenadas cartesianas e polares.

No sistema $\bar{x}\,\bar{O}\,\bar{y}$ tem-se que $r = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}$ e $\bar{x} = r\cos\theta$, então a equação (10) pode ser reescrita como

$$\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} - \bar{x}\,e = eq \quad \text{ou} \quad \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} = e(\bar{x} + q). \tag{11}$$

Efetuando a translação para o sistema xOy em que

$$x = \bar{x} + q \quad \mathbf{e} \quad y = \bar{y}\,,$$

a expressão (11) torna-se

$$\sqrt{(x-q)^2 + y^2} = ex,$$

e elevando ambos os membros ao quadrado

$$(x-q)^2 + y^2 = e^2x^2.$$

Desenvolvendo o quadrado e simplificando

$$(1 - e^2)x^2 - 2qx + y^2 + p^2 = 0$$

Definindo $q = 2p$ obtém-se

$$(1 - e^2)x^2 - 4px + y^2 + 4p^2 = 0$$

que é equação (2).

Conclui-se que as equações (9) e (2) são equivalentes. Portanto, a partir da equação (9) obtém-se uma elipse para $0 < e < 1$, parábola para $e = 1$ e hipérbole para $e > 1$.

A equação (9) foi determinada considerando o foco F com coordenadas cartesianas $(q, 0)$, $q > 0$ no sistema xOy. Considere o foco e o pólo coincidindo com a origem do sistema xOy e o eixo polar sobre o eixo Ox. De maneira análoga ao procedimento usado para determinar a equação (9), pode-se obter outras formas da equação polar para as cônicas considerando os seguintes casos:

Caso 1: A reta diretriz d é perpendicular ao eixo polar

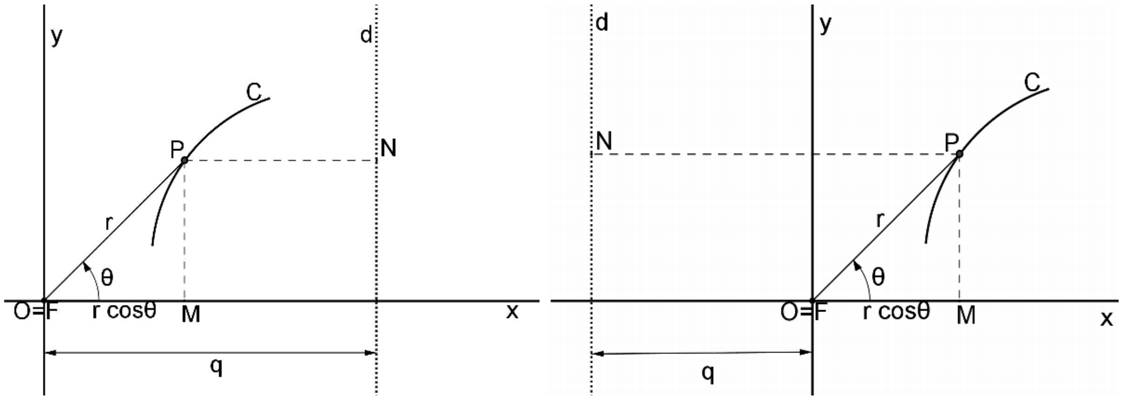

Figura 8: Diretriz perpendicular ao eixo polar.

Obtém-se a equação

$$r = \frac{eq}{1 \pm e\cos\theta}$$

onde o sinal positivo ou negativo deverá ser usado conforme a diretriz se encontre à direita ou à esquerda do foco, respectivamente.

Caso 2: A reta diretriz d é paralela ao eixo polar

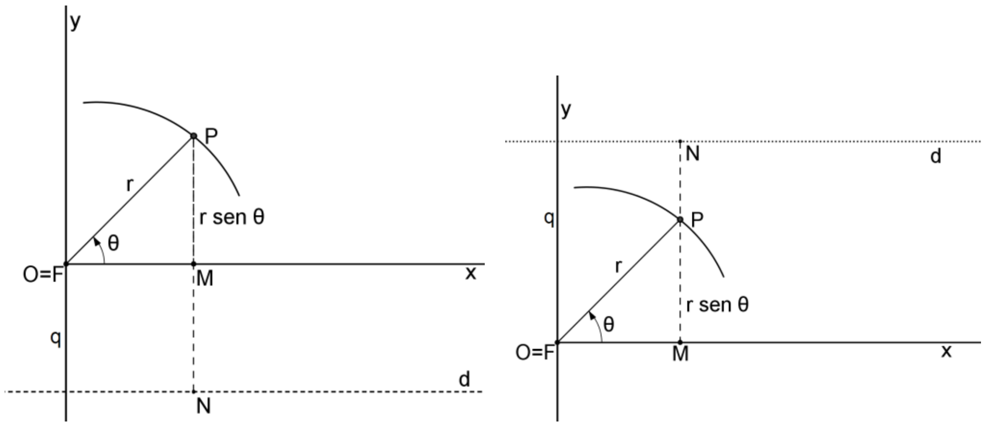

Figura 9: Diretriz paralela ao eixo polar.

Obtém-se a equação

$$r = \frac{eq}{1 + e\ sen\ \theta}$$

onde o sinal positivo ou negativo deverá ser usado conforme a diretriz se encontre a cima ou abaixo do eixo polar, respectivamente.

Geogebra©: Visualização das cônicas determinadas pela equação polar

Caso 1: Quando a reta a diretriz for perpendicular ao eixo polar

Procedimento:

1. Através da ferramenta **Seletor** insira os parâmetros e , q e θ ;
2. Configure o intervalo do parâmetro e colocando valor mínimo de 0.1 ;
3. Clicando com botão direito na área de trabalho marque a opção **Eixos**;
4. Encontre o ponto de interseção dos eixos coordenados. Use a ferramenta **Interseção de dois objetos;**
5. Chame de F a interseção dos eixos;
6. Insira no campo de entrada a expressão $r = e * \frac{q}{1 + e * cos(\theta)}$;
7. Digite no campo de entrada o ponto $B = (r;\ 0$);
8. Insira no campo de entrada o comando **girar[**B; θ **].** Para digitar o parâmetro θ clique na janela à direita do campo de entrada e selecione tal parâmetro;
9. Renomeie o ponto B' chamando-o de P ;
10. Trace o vetor de origem em F e extremidade em P e chame este vetor de r ;
11. Trace o ângulo $B\hat{F}P$ e esconda o ponto B ;
12. Insira no campo de entrada a expressão $x = q$. Com este procedimento aparecerá a reta diretriz da cônica que será gerada pelo movimento do vetor r ;
13. Habilite rastro do ponto P e varie o valor de θ para visualizar a cônica.
14. Marque a opção **Animação ativada** no seletor θ e observe a curva gerada para os casos $e < 1$, $e = 1$ e $e > 1$.

Caso 2: Quando a reta diretriz for paralela ao eixo polar

Procedimento:

1. Repita os procedimentos feitos no caso 1 até o item 5.
2. Insira no campo de entrada a expressão $r = e * \frac{q}{1 + e * sin(\theta)}$;
3. Digite no campo de entrada o ponto $B = (r;\ 0)$;
4. Insira no campo de entrada o comando **girar[**B; θ **]**;
5. Renomeie o ponto B' chamando-o de P ;
6. Trace o vetor de origem em F e extremidade em P e chame este vetor de r ;

7. Trace o ângulo $B\hat{F}P$ e esconda o ponto B ;

8. Insira no campo de entrada a expressão $y = q$. Com este procedimento aparecerá a reta diretriz da cônica que será gerada pelo movimento do vetor r ;

9. Habilite rastro do ponto P e varie o valor de θ para visualizar a cônica.

10. Marque a opção **Animação ativada** no seletor θ e observe a curva gerada para os casos $e < 1$, $e = 1$ e $e > 1$.

Forma das cônicas

Nesta seção discute-se a relação entre a "forma" das cônicas e o conceito de excentricidade.

Elipse

Da equação (5) obtém-se que $-a \leqslant x \leqslant a$ e $-b \leqslant y \leqslant b$. Desta forma, o conjunto de pontos de uma elipse estão contidos em um retângulo chamado de **retângulo fundamental**. Quanto à forma da elipse pode-se dizer que algumas são mais alongadas e outras mais arredondadas. Isso se dá pelo fato da elipse estar estreitamente vinculada ao seu retângulo fundamental ou a sua excentricidade. Em relação ao retângulo fundamental, se ele for alongado o mesmo se dará com a elipse; se o retângulo for quase um quadrado, a elipse será quase uma circunferência. Para esta análise o que importa é quanto o parâmetro *a* é maior que *b* e isso pode ser medido pelo quociente *b/a* que é designado por **centralidade da elipse**. Esta razão pertence ao intervalo]0, 1[pois $0 < b < a$. Assim quanto mais próximo *b/a* estiver de 1, mais o retângulo fundamental se aproximará de um quadrado e portanto mais arredondada será a elipse. Por outro lado, quanto mais próximo *b/a* estiver de 0 mais alongada será a elipse. A excentricidade *e*, dada pela razão c/a é outro indicador da forma desta curva. Uma vez que

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1$$

quando um dos valores *b/a* ou *c/a* se aproxima de 1 o outro se aproxima de 0. Em outras palavras, quanto maior a excentricidade menor será sua centralidade e vice-versa. Por isso, são mais alongadas as elipses para as quais *c/a* é mais próximo de 1, e mais arredondadas aquelas para quais *c/a* está mais próximo de 0.

Construção da forma e excentricidade da elipse

Procedimento:

1. Clique com mouse direito sobre a área de trabalho e, em seguida, clique em **Eixos** para exibir os eixos coordenados;

2. Insira na área de trabalho os parâmetros *a* e *b* através da ferramenta **Seletor**;

3. Insira no campo de entrada a equação: x^2/a^2 + y^2/b^2=1. Dê <Enter> e aparecerá na área de trabalho uma elipse nomeada por c;

4. Insira no campo de entrada, um de cada vez, os comandos:

   a) **foco[c]** para exibir os focos da elipse;

   b) **vértice[c]** para exibir os vértices;

   c) **centro[c]** para exibir o centro;

5. Trace um segmento que liga o centro da curva a um dos focos e outro que liga o centro ao vértice da curva. Para isto use a ferramenta **Segmento definido por dois pontos**;

6. Supondo que os dois segmentos traçados no item anterior sejam respectivamente *e* e *f* digite no campo de entrada o comando **texto[e/f]** e será exibido na área de trabalho o valor da excentricidade da curva.

7. Outra opção para exibir a excentricidade da curva é digitar no campo de entrada o comando **texto[excentricidade[c]]**;

8. Altere o valor dos parâmetros *a* e *b* manualmente arrastando o ponto do seletor e observe a forma da curva. Faça $a = b$ e observe que tipo de curva aparece;

9. Clique com mouse direito sobre os seletores e marque a opção **Animação ativada**;

Hipérbole

As inclinações das assíntotas da hipérbole tem estreita ligação com o formato desta curva. Como as inclinações são determinadas pelo número *b/a*, que está associado ao retângulo fundamental, então o formato da hipérbole também depende de seu retângulo fundamental. Os valores de *b/a* próximos de 1 indicam que este retângulo se assemelha a um quadrado; valores muito maiores que 1 ou muito próximos de 0 indicam que ele é mais alongado (alto e estreito, ou baixo e comprido). A relação $c^2 = a^2 + b^2$, dividida membro a membro por a^2, fornece $(c/a)^2 = 1 + (b/a)^2$. Pode-se utilizar o número $e = c/a$, ou seja, a excentricidade da hipérbole, como indicador da sua forma (note que $e > 1$, ao contrário da excentricidade da elipse, que pertence ao intervalo]0; 1[ ). Quando e é um número "muito próximo" de 1, *b/a* é "muito próximo" de 0, indicando que a altura do retângulo fundamental é muito menor que sua base. Os ramos da hipérbole são, portanto, mais fechados nas proximidades dos vértices, e abrem-se lentamente à medida que $|x|$ cresce. Por outro lado se *e* é muito maior que 1 então *b/a* também será. O retângulo fundamental tem altura muito maior que a base. Neste caso, na vizinhança dos vértices os ramos da hipérbole tendem para as retas $x = a$ e $x = -a$, e seus pontos afastam-se lentamente delas à medida que $|x|$ cresce.

Construção da forma e excentricidade da hipérbole

1. Clique com mouse direito sobre a área de trabalho e em seguida clique em **Eixos**

para exibir os eixos coordenados;

2. Insira na área de trabalho os parâmetros a e b através da ferramenta **Seletor**;

3. Insira no campo de entrada a equação: x^2/a^2-y^2/b^2=1

Dê <Enter> e aparecerá na área de trabalho uma hipérbole nomeada por c;

4. Insira no campo de entrada, um de cada vez, os comandos:

a) **foco[c]** para exibir os focos da hipérbole;

b) **vértice[c]** para exibir os vértices;

c) **centro[c]** para exibir o centro ;

d) y = (b/a)* x e y = -(b/a)*x para exibir as assíntotas;

e**) texto[excentricidade[c]]** para exibir o valor da excentricidade.

5. Chame o centro de O, os focos de F_1 e F_2 e os vértices de A_1 e A_2;

6. Trace uma reta r perpendicular ao eixo da hipérbole e que passa pelo vértice A2. Use a ferramenta **Reta perpendicular**;

7. Marque o ponto de interseção da reta r com uma das assíntotas e chame de H esta interseção. Use a ferramenta **Interseção de dois objetos**;

8. Trace os segmentos OF_2, OA_2, HA_2 e OH e exiba suas medidas;

9. Observe que $OA_2 \cong OH$ e que $OC^2 + OH^2 = OH^2$;

10. Varie os valores dos parâmetros **a** e **b** e observe valor da excentricidade e forma da hipérbole;

11. Clique com mouse direito sobre os seletores **a** e **b** e marque a opção **Animação ativada**.

Parábola

Como toda parábola tem excentricidade igual a 1 pode-se dizer então que todas elas são semelhantes. Para visualizar melhor essa propriedade pode-se analisar o triângulo fundamental associado a cada parábola. Trata-se de um triângulo isósceles, de base igual a amplitude focal AB e altura igual ao parâmetro *p* conforme ilustra a figura 9.

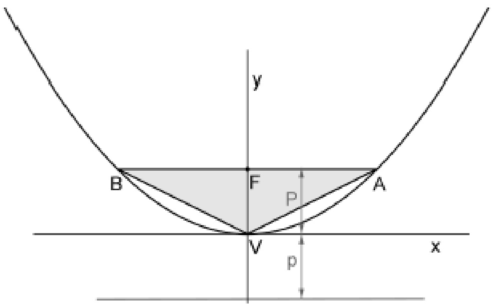

Figura 9: Triângulo fundamental da parábola

Se este for “mais alongado”, isto é, se *p* fosse bem maior que o comprimento de AB, a parábola seria “mais fechada”. Se, ao contrário, AB tivesse comprimento bem maior que *p*, a parábola seria “mais aberta”. Pela definição da parábola é fácil observar que o comprimento de AB é o dobro da distância do foco à diretriz, ou seja, o comprimento de AB para todas as parábolas, é 4*p*. Observa-se também que a medida do ângulo $A\hat{V}B$ é a mesma, qualquer que seja a parábola considerada. Portanto, os triângulos fundamentais de todas as parábolas são semelhantes, independentemente do valor de *p*.

Construção da forma e a excentricidade da parábola

Procedimento:

1. Através da ferramenta **Seletor** insira o parâmetro p;

2. Insira no campo de entrada a expressão: y^2=4*p*x

Dê <Enter> e aparecerá uma parábola nomeada por c.

3. Insira no campo de entrada os comandos: **foco[c]**, **diretriz[c]**, **eixoprincipal[c]**

e **vértice[c]**. Para cada comando inserido dê <Enter>;

4. Chame o vértice de V e o foco de F;

5. Trace uma reta perpendicular ao eixo da parábola passando pelo ponto F;

6. Encontre os pontos de interseção da parábola com a reta traçada no item anterior

e nomeie estes pontos por A e B. Use a ferramenta **Interseção de dois objetos**;

7. Esconda a reta traçada no item 5;

8. Trace os segmentos VA, VB, VF e AB;

9. Chame a medidas dos segmentos VF e AB de *e* e *f* respectivamente;

10. Use a ferramenta **Polígono** para traçar o triângulo fundamental AVB da parábola;

11. Exiba a medida da altura VF e da base AB do triângulo AVB;

12. Insira no campo de entrada o comando **texto[f/e]** e aparecerá na área de trabalho o valor desta razão;

13. Trace o ângulo $A\hat{V}B$ e exiba seu valor;

14. Varie o valor do parâmetro *p* e observe o ângulo $A\hat{V}B$ e a razão $\frac{AB}{VF} = \frac{f}{e}$.

Referências

BOULOS, P.; CAMARGOS, I. (2005). Geometria Analítica. 3. ed. São Paulo: Prentice Hall.

LOPES, J. F. (2011). Cônicas e Aplicações. Dissertação de Mestrado. Rio Claro: Unesp.