A NOÇÃO DE INTEGRAL GENERALIZADA: SUA EXPLORAÇÃO APOIADA NA TECNOLOGIA E NO CONTEXTO HISTÓRICO

Francisco Regis Vieira Alves

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará - IFCE

fregis@ifce.edu.br

A noção de integral generalizada ou de integral imprópria surgiu diretamente, a partir da investigação e busca pela solução de problemas vinculados à noção de integral, nas concepções iniciais de Riemann e Cauchy. Essa noção permitiu o ataque de outros problemas, atinentes a uma classe mais ampla (e geral) de funções, envolvendo comportamentos patológicos, quando comparadas aos casos particulares de integração tomados por Riemann. Assim, a partir desse contexto, extraímos implicações para sua ressiginificação e descrição heurística da noção de convergência e divergência, com o recurso aos softwares Geogebra e do CAS Maple. Nesse minicurso, a visualização e a percepção de propriedades gráfico-geométricas assumem papel fundamental para o entendimento das situações, posição que se coaduna com o pensamento heurístico inicial, imprimido por figuras emblemáticas no passado.

Palavras-chaves: Integral generalizada, Softwares, Ensino, Visualização.

1. INTRODUÇÃO

A noção de integral constitui pedra fundante no Cálculo Diferencial e Integral. No rol dos matemáticos que contribuíram, direta ou indiretamente para a gênese e sisetmatização da noção de integral, vale assinalar: Newton, Lebesgue, Cauchy, Riemann, Du Bois Raymond, Dirichlet, Lebesgue (BOYER, 1949; CAVAILLÉS, 1962, GRATTAN-GUINESS, 1970).

A integral segundo Cauchy[1] e Riemann, desconsiderava uma série de comportamentos e propriedades patológicas de uma função, sobretudo, quando nos referimos ao seu conjunto de pontos de descontinuidade (e domínio ilimitado). A História da Matemática registra a evolução da noção de integral que passou a considerar um modelo matemático que permitiu o trato e extração de conclusões relativas a uma classe maior de funções.

Nesse minicurso, na medida em que pontuamos aspectos históricos que marcaram a evolução da noção de integral de Riemann, apresentamos alguns critérios que decidem e descrevem as importantes noções de convergência e da divergência de integrais impróprias ou integrais generalizadas. Os exemplos e situações serão ressiginificados e estruturados a partir da exploração dos *softwares Geogebra* e do *CAS Maple*. A visualização e percepção de propriedades são fundamentais para a aquisição de um entendimento que extrapola a simples manipulação algébrico-manipulatória, tradicionalmente enfatizada pelos autores de livros de Cálculo (ALVES, 2012, p. 7).

2. Um pouco do contexto histórico

A noção de integral de Riemann, nos livros de Cálculo Diferencial e Integral, no Brasil, assume determinadas restrições (como a continuidade) da função $f:[a,b]\to IR$, que garantem a

[1] Dugac (2003, p. 101)recorda que Cauchy foi o primeiro a fornecer a noção de integral para a classe de funções contínuas num intervalo [a.b].

existência/significado de $\int_a^b f(x)dx$. Daí, podemos falar sobre a integral generalizada, que passa a considerar uma classe maior de funções, tais como: (i) funções definidas em intervalos abertos ou semi-abertos do tipo $(a,b]$, [a,b), (a,b), $(\pm\infty,\pm)$; (ii) funções com imagem ilimitada. E não necessariamente contínuas em todos os pontos do seu domínio.

Patenteamos autores como Bloch (2011, p. 342) que evidencia o caráter heurístico inerente à noção de integral imprópria, ao afirmar que "podemos pensar numa aproximação deste intervalo, por meio de intervalos do tipo $[a,t]$, onde $t \in (a,b)$ e t é pensado como cada vez mais próximo do ponto $x = b$". Neste caso, o autor considera funções do tipo $f:[a,b) \to IR$ e sua descrição possibilita a interpretação gráfico-geométrica dinâmica associada às noções de convergência e divergência.

De modo preciso, tal descrição permite descrever o símbolo $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx$, como as aproximações sucessivas de contribuições de área, segundo a definição da integração clássica de Riemann, entretanto, retirando a condição de continuidade em $x = b$.

No século XIX, observamos que a segunda parte do curso de Cauchy, intitulada *Leçons sur les applications du Calcul infinitesimal à la Geometrie*, inclui aplicações de sua teoria da integral à Geometria. Algumas das aplicações envolvem o comprimento de arco e a determinação de áreas e volumes específicos. "Uma das motivações para a teoria das integrais de Cauchy foi devido à sua percepção da necessidade de uma teoria para o estudo de integrais mais complexas." (GRABINER, 1981, p. 160).

Nesse sentido, vale assinalar que em 1823, Cauchy aplicou sua definição de integral como limites de somas e usou, também, teoremas envolvendo integrais por meio do cálculo de resíduos. Na introdução da obra intitulada "*Memoires sur les íntegrales définies prises entre des limites imaginaires*", em 1825, ele enfatizou a noção de valor principal (V.P.) de integrais impróprias, antes que a integral vista como limites de somas envolvendo funções contínuas.

Edwards (1979, p. 322) recorda, por exemplo, que "Cauchy considerou integrais de funções possuindo infinitos pontos isolados de descontinuidade. Por exemplo, se $\lim_{x \to X} f(x) = \pm\infty$, todavia, contínua em $[x_0, X]$ e, para cada $\varepsilon > 0$, ele definiu a integral $\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{x_0}^{X-\varepsilon} f(x)dx$.". Por outro lado, outros matemáticos imprimiram sua contribuição relativa à mesma noção. Com efeito, de acordo com Hairer & Wanner (2008, p. 260) a seguinte definição é devida é Gauss (1812): se a função $f:(a,b] \to IR$ é integrável em todo intervalo da forma $[a+\varepsilon, b]$, então definimos $\int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ se tal limite existe. Bottazzini (1986, p. 132) descreve o seguinte contexto histórico:

> "A noção de integral imprópria foi objeto de discussão entre os matemáticos desde Euler. O próprio Euler, e Laplace, de modo próximo em sua investigação, de modo próximo à teoria da probsbilidade. Poisson e Legendre, em seu *Exercices de Calcul Integral* (1811), todos usaram o tipo de passagem indutiva da parte real à imaginária."

Concluímos essa seção, pontuando a integral particular $\int_0^\infty \frac{x \cdot \cos(a \cdot x)}{sen(b \cdot x)} \cdot \frac{dx}{1+x^2}$ foi motivo de interesse de Cauchy (em 1827), por possuir uma série de descontinuidades. Legendre acresceu determinadas condições que permitiram simplificar tal integral, ao considerar as condições:

$a > b$ e b<a e incorreta no caso de $a = b$. Por meio de substituições, Legendre chegou na seguinte integral $\int_0^\infty \frac{m \cdot \cot(a \cdot x)}{m^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{e^{2am} - 1}$ Numa contenda posterior com Legendre, Cauchy apresentou ainda, por intermédio da substituição $\begin{cases} a = b - \alpha \\ \alpha \to 0 \end{cases}$ a seguinte formulação $\int_0^\infty sen(\alpha x) \cdot \frac{xdx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-\alpha}$. Na fig. 1, assinalamos um quadro histórico de evolução da noção de integral. Nela observamos a contribuição de vários matemáticos profissionais.

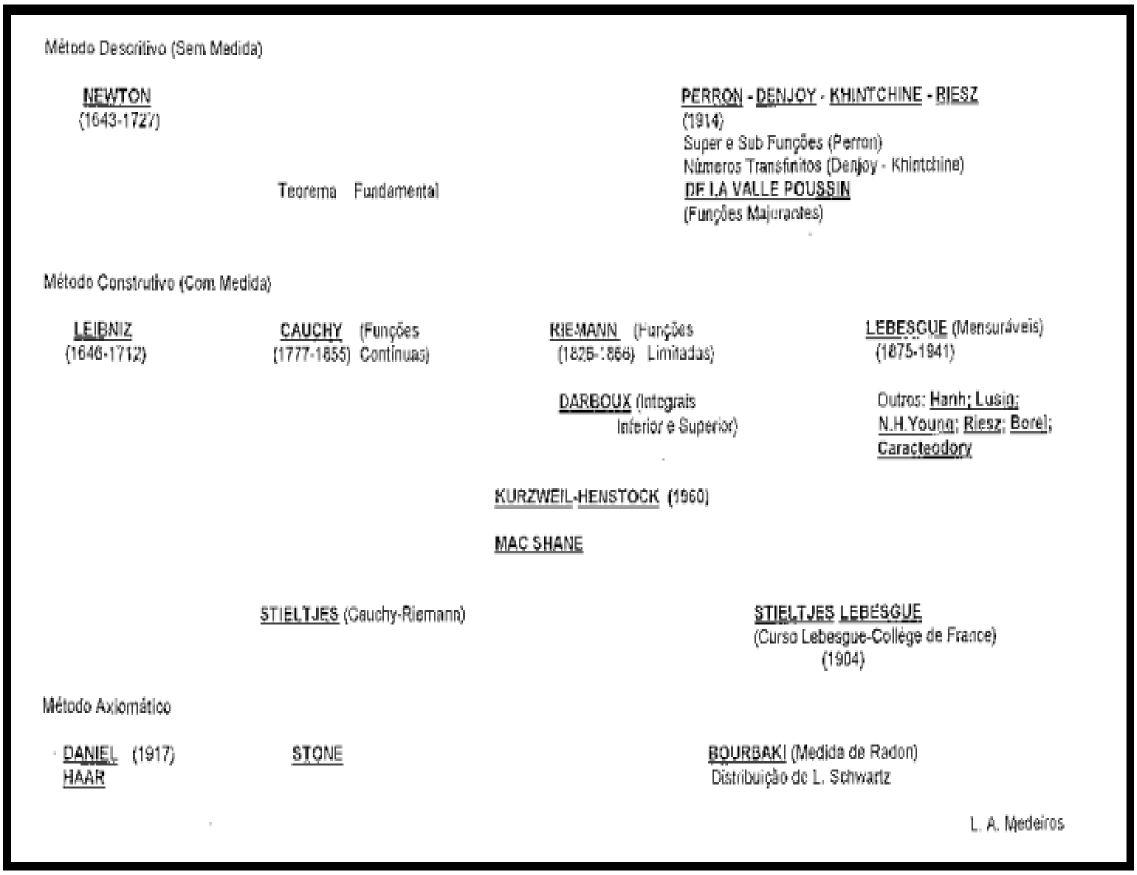

Figura 1. Medeiros (2002, p. 29) fornece um quadro esquemático para a evolução da noção de integral

Com o uso de notação moderna, passaremos, pois, a apresentação de algumas definições e critérios de convergência presentes nos compêndios de Análise Real (LIMA, 2009; SACARCHI, 1998; STRICHARTZ, 2000; TRENCH, 2012). Vejamos, pois, nossa primeira definição.

Definição 1: Dizemos que a função f é localmente integrável em um intervalo $I \subset IR$ se f está definida em I e é Riemann integrável em qualquer subintervalo fechado $[a,b] \subset I$.

Com o intuito de definir, de acordo com os compêndios modernos de Análise Real, observamos que a integral imprópria $\int_a^b f(x)dx$, de uma função definida num intervalo do tipo $(a,b]$, (a,b) ou [a,b), a função f deve ser localmente integrável nesses intervalos. Então, estabelecemos $\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a} \int_a^c f(x)dx$ quando tal limite existe. Notamos que a integral de

Riemann $\int_a^c f(x)dx$ existe, pois f é localmente integrável em $[a,c]\subset[a,b)$. Para funções do tipo $f:[a,+\infty)\to IR$ definiremos $\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$ (com $a>0$).

Definição 2: seja uma função $f:IR\to IR$ contínua. Dado qualquer $a\in IR$, definiremos $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx:=\int_{-\infty}^{a} f(x)dx+\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$.

Teorema 1(A fórmula de Newton-Leibniz para integrais impróprias) Dada uma função contínua em $[a,b)$, onde $-\infty<a<b\le+\infty$ e com f localmente integrável. Daí, sendo F uma primitiva nesse intervalo. Então, a integral imprópria $\int_a^b f(x)dx$ existe se, e somente se, o limite $\lim_{x\to b}F(x)$ existe e vale $\int_a^b f(x)dx=\lim_{x\to b}F(x)-F(a)$.

Dem. De acordo com a definição 1, escrevemos $\int_a^b f(x)dx=\lim_{c\to a}\int_a^c f(x)dx\overset{localmente}{\underset{\text{integrável}}{=}}\lim_{c\to a}\left[F(c)-F(a)\right]=\lim_{c\to a}\left[F(c)\right]-F(a)$. Por fim, a tese segue em virtude da igualdade estabelecida $\int_a^b f(x)dx=\lim_{c\to a}\left[F(c)\right]-F(a)$. Vamos ver alguns exemplos de uso dessa fórmula.

Exemplo: Avaliar as integrais $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}},\ \int_1^\infty x^{-2}\cdot\ln(x)dx,\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{dx}{x\cdot\ln^3(x)}$ de acordo com a fórmula de Newton-Leibniz.

Sol. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{c\to0}\int_c^1\frac{dx}{\sqrt{x}}\overset{\text{Primitiva}}{\underset{F(x)=2\cdot\sqrt{x}}{=}}F(1)-\lim_{c\to0}\left[F(c)\right]=2-\lim_{c\to0}\left[2\cdot\sqrt{c}\right]=2$. No segundo caso $\int x^{-2}\cdot\ln(x)dx\overset{Por\ \text{partes}}{\underset{\begin{cases}\text{u=ln(x)}\\ \text{dv=d(1/x)}\end{cases}}{=}}\left[\ln(x)\cdot\frac{1}{x}-\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}dx\right]_1^t$, quando $t\to+\infty$. Portanto, estabelecemos $\int_1^\infty x^{-2}\cdot\ln(x)dx=\left[\lim_{t\to+\infty}(\frac{\ln(x)}{x})-\int_1^\infty\frac{1}{x^2}dx\right]\overset{\text{Primitiva}}{\underset{F(x)=-x^{-1}}{=}}0-(-1)=1$. Por fim, usando por partes $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{dx}{x\cdot\ln^3(x)}=\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{d(\ln(x))}{\ln^3(x)}\overset{subst}{\underset{y=\ln(x)}{=}}\int_1^{+\infty}\frac{dy}{y^3}=-\left[\frac{y^{-2}}{2}\right]_1^\infty=\frac{1}{2}$. Mas, o que representam os números $2{,}1$ e $\frac{1}{2}$? Qual o significado geométrico da convergência?

Definição 3: Chamamos de Valor Principal de Cauchy de $\int_a^b f(x)dx$ é o valor do limite $\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right]$ quando ele existe. Denotamos por $VP\int_a^b f(x)dx$.

Vale observar que uma integral por possui VP e, entretanto, divergir. Basta observar que $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$ diverge, enquanto que $VP\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_{0+\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}\right]=0$.

Proposição 1: Consideremos $f:[a,\infty) \rightarrow IR$ com $f(x) \geq 0$. E se $\forall x \in [a,\infty)$, então $\int_a^\infty f(x)dx$ converge se, e somente se, $\int_a^x f(x)dx \leq K$, $\forall \text{x} \in [\text{a},\infty)$.

Dem. Definiremos $g(x) = \int_a^x f(x)dx$. Reparemos que se $x > y \therefore g(x) - g(y) = \int_a^x f(x)dx - \int_a^y f(x)dx = \int_y^x f(x)dx \geq 0$. Ou seja, $g(x) \geq g(y)$ isto mostra que a função g é não decrescente. $(\Rightarrow)$ se ocorrer desta função ser limitada (superiormente) o limite $\lim_{x\to\infty} g(x) = \int_a^\infty f(x)dx$ deve existir. $(\Leftarrow)$ Mas se o limite existe, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \int_a^\infty f(x)dx$, consequentemente, deverá ser limitada superiormente.

Teorema 2 (critério da comparação): Sejam $f, g:[a,\infty) \rightarrow IR$ contínuas. Se $k > 0$ e $0 \leq f(x) \leq k \cdot g(x)$, para $x \geq a$. Tem-se que: se $\int_a^\infty g(x)dx$ converge, então $\int_a^\infty f(x)dx$ converge; se $\int_a^\infty f(x)dx$ diverge, então $\int_a^\infty g(x)dx$ diverge.

Dem. (i) se $\int_a^\infty g(x)dx$ converge, pela proposição anterior, $\int_a^x f(x)dx \leq K_1$, $\forall \text{x} \in [\text{a},\infty)$, para algum $K_1 \in IR$. Segue que $\int_a^\infty f(x)dx \leq \int_a^\infty k \cdot g(x)dx = k\int_a^\infty g(x)dx = k \cdot K_1 = K_2$. Assim, $\int_a^\infty f(x)dx$ é limitada superiormente, pela proposição, converge.

Enquanto que no caso de (ii), assumiremos que $\int_a^\infty f(x)dx$ diverge. Mas isto quer dizer que $\int_a^\infty f(x)dx$ é ilimitada superiormente (pois as funções são não negativas). Ademais, $\int_a^\infty f(x)dx$ assume valor maior do que qualquer outro valor constante. Reparemos, ainda, que $\int_a^\infty f(x)dx$ é não decrescente. Depreendemos que tenderá ao infinito. Mas pelo fato de $\int_a^\infty f(x)dx \leq k\int_a^\infty g(x)dx$, o mesmo comportamento esperado de $\int_a^\infty g(x)dx$. Portanto, deve divergir.

Definição 4: (convergência absoluta). A integral $\int_a^\infty f(x)dx$ é chamada de absolutamente convergente se $\int_a^\infty |f(x)|dx$ converge.

Teorema 3: Se $f:(a,b] \rightarrow IR$ é contínua e $\int_a^b |f(x)|dx$ converge. Então $\int_a^b f(x)dx$ convergirá. Para demonstrar este teorema precisaremos das seguintes definições.

Definição 5: seja $f:(a,b] \rightarrow IR$ é contínua, definamos sua parte positiva e sua parte negativa $f_+, f_-:(a,b] \rightarrow IR$, pondo, para $a < x \leq b$:

$\{ f_+(x) = \max\{ f(x), 0\}$ $f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$. Assim, podemos verificar que valem as igualdades $\{ f_+(x) = 1/2\left[|f(x)| + f(x) \right]$ e $f_-(x) = 1/2\left[|f(x)| - f(x) \right]$.

Deste modo, extraímos que sua parte positiva e sua parte negativa devem ser contínuas. Ademais, teremos $f_+(x) \geq 0$ e $f_-(x) \geq 0$. Outrossim, se verifica que $|f| = f_+ + f_- \geq f_+$ e $|f| = f_+ + f_- \geq f_-$. Segue que $\begin{cases} f_+ \leq |f| \\ f_- \leq |f| \end{cases}$. Segue, com base nas hipóteses do teorema, se $\int_a^b |f(x)|\,dx$ converge, então, pelo critério da comparação, suas partes positiva e negativa devem convergir. Assim, desde que $f = f_+ - f_- \therefore \int_a^b f(x)dx = \int_a^b [f_+(x) - f_-(x)]dx = \int_a^b f_+(x)dx - \int_a^b f_-(x)dx$ será, igualmente, convergente.

Teorema 4 (Critério de Cauchy): Seja $f : [a, \infty) \to IR$ em que $f|_{[a,r]}$ é integrável para $\forall r > a$. Nessas condições $\int_a^\infty f(x)dx$ converge $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, existe $M > 0$ e $B > A > M$ se tem $\left| \int_A^B f(x)dx \right| < \varepsilon$.

Dem. $(\Rightarrow)$suponhamos que $\int_a^\infty f(x)dx$ converge, digamos para $L \in IR$. Dado agora $\varepsilon > 0$, usando a definição de convergência, podemos tomar $M \geq a$, suficientemente grande tal que se $A \geq M$, escrevemos: $\left| \int_a^A f(x)dx - L \right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Agora, para $B > A \geq M$, escrevemos:

$$\left| \int_A^B f(x)dx \right| = \left| \int_a^B f(x)dx - \int_a^A f(x)dx - L + L \right| \leq \left| \int_a^B f(x)dx - L \right| + \left| \int_a^A f(x)dx - L \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

$(\Leftarrow)$ Dado $n \in IN$, definiremos $a_n := \int_a^n f(x)dx$. Para $\varepsilon > 0$, existe $m \geq a$ tal que se $m, n \geq M$, escreveremos: $|a_m - a_n| = \left| \int_a^m f(x)dx - \int_a^n f(x)dx \right| = \left| \int_m^n f(x)dx \right| < \varepsilon$. Segue que a sequência $\{a_n\}_{n \in IN}$ é de Cauchy. Portanto, convergente.

Exemplo: Decidir sobre a convergência da integral $I = \int_1^\infty \arctan(x)dx/x^2$.

Solução. Reparemos que para usar o teorema de Cauchy, devemos verificar que o limite de $G(x', x'') = \left| \int_{x'}^{x''} \arctan(x)dx/x^2 \right| \underset{x''\to\infty}{\overset{x'\to\infty}{\longrightarrow}} 0$ é zero. Reparemos que, pelo Teorema do Valor Médio para integrais, escrevemos: $\left| \int_{x'}^{x''} \frac{\arctan(x)dx}{x^2} \right| = |\operatorname{arct} g(x)| \left| \int_{x'}^{x''} \frac{dx}{x^2} \right| = |\operatorname{arct} g(x)| \leq \frac{\pi}{2} \left| \int_{x'}^{x''} \frac{dx}{x^2} \right| = \frac{\pi}{2} \left| \frac{1}{x'} - \frac{1}{x''} \right| \underset{x''\to\infty}{\overset{x'\to\infty}{\longrightarrow}} 0$. Na figura abaixo, divisamos o comportamento de convergência da integral $I = \int_1^\infty \arctan(x)dx/x^2$.

Podemos usar o critério de Cauchy na seguinte integral $I_2 = \int_1^{\infty} \frac{sen(x)dx}{x^2}$, usando a noção de convergência absoluta. De fato, basta ver que $\left| \int_{x'}^{x''} \frac{|sen(x)|\,dx}{x^2} \right| \leq \left| \int_{x'}^{x''} \frac{dx}{x^2} \right| = \left| \frac{1}{x'} - \frac{1}{x''} \right| \underset{x''\to\infty}{\overset{x'\to\infty}{\longrightarrow}} 0$.

Assim, esta integral converge absolutamente e, por teorema, $I_2 = \int_1^{\infty} \frac{sen(x)dx}{x^2}$ convergirá.

Exemplo: Vamos usar o Critério de Cauchy II no seguinte caso $\int_1^2 \frac{sen(x)dx}{\sqrt{x-1}}$.

Sol. Reparemos que a função $f(x) = \frac{sen(x)}{\sqrt{x-1}}$ é descontínua em $(1,2]$. Usando o Teorema do Valor Médio para integrais, dado $\varepsilon > 0$ e $x', x'' \in [a,b)$, existe $c \in [a,b)$, tal que: $\int_{x'}^{x''} \frac{sen(x)dx}{\sqrt{x-1}} = sen(c) \int_{x'}^{x''} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$.

Segue que: $\left| \int_{x'}^{x''} \frac{sen(x)dx}{\sqrt{x-1}} \right| = \left| sen(c) \int_{x'}^{x''} \frac{dx}{\sqrt{x-1}} \right| \leq |sen(c)| \left| \int_{x'}^{x''} \frac{dx}{\sqrt{x-1}} \right| < 2\sqrt{x''-1} + 2\sqrt{x'-1} < \varepsilon$, se $x', x'' \in (1, 1+\delta)$.

O próximo teorema é uma contribuição de Lejeune Dirichlet (1805-1959).

Teorema 5 (teste de Dirichlet para integrais impróprias): Sejam $f, g : [a, \infty) \to IR$, com f monótona, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, f' integrável em $[a,x]$, $\forall x > a$. Tem-se também que g contínua e $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ limitada, em que $G : [a,\infty) \to IR$. Nestas condições, a integral $\int_a^{\infty} f(x) \cdot g(x)dx$ converge.

Demonstração 1: Vamos considerar a integral $\int_a^c f(x) \cdot g(x)dx$, onde $c \in IR$ é qualquer que $c > a$. Assim, tomando o fechado $[a,c]$, pelo Teorema do Valor Médio para Integrais, existe $b \in [a,c]$, de modo que: $\int_a^c f(x) \cdot g(x)dx = f(a)\int_a^b g(x)dx + f(b)\int_b^c g(x)dx$. Mas, desde que $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ limitada, escrevemos:

$$\int_a^c f(x) \cdot g(x)dx = f(a)\int_a^b g(x)dx + f(b)\int_b^c g(x)dx \leq \int_a^c f(x) \cdot g(x)dx = f(a) \cdot M + f(b) \cdot M$$

Segue que $\int_a^c f(x) \cdot g(x)dx \leq [f(a) + f(b)] \cdot M$ e, recordando que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, podemos escolher $[f(a) + f(b)] < \frac{\varepsilon}{M}$ e, concluímos que $\int_a^c f(x) \cdot g(x)dx < \varepsilon$.

Demonstração 2: Aplicaremos, nesta segunda demonstração, o critério de Cauchy. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$, e $\forall x', x'' \in [\delta, \infty)$ tal que

$$\int_{x'}^{x''} f(x)g(x)dx = \int_{x'}^{x''} F'(x)g(x)dx \underset{por\ \text{partes}}{\overset{\text{int}egração}{=}} \left[F(x) \cdot g(x)\right]_{x=x'}^{x=x''} - \int_{x'}^{x''} F(x)g'(x)dx =$$

$=\left[F(x'')\cdot g(x'')-F(x')\cdot g(x')\right]-\int_{x'}^{x''}F(x)g'(x)dx$. Mas na expressão $\int_{x'}^{x''}F(x)g'(x)dx$, usaremos o Teorema do Valor Médio. Assim, existe $c_{x'x''}\in[x'',x']$ tal que $\int_{x'}^{x''}F(x)g'(x)dx=F(c_{x'x''})\int_{x'}^{x''}g'(x)dx=F(c_{x'x''})\left[g(x'')-g(x')\right]$. Substituindo, teremos que: $\int_{x'}^{x''}f(x)g(x)dx=\left[F(x'')\cdot g(x'')-F(x')\cdot g(x')\right]-\left[F(c_{x'x''})\left[g(x'')-g(x')\right]\right]$. Passando o módulo:

$$\left|\int_{x'}^{x''}f(x)g(x)dx\right|=\left|F(x'')\cdot g(x'')-F(x')\cdot g(x')+F(c_{x'x''})g(x')-F(c_{x'x''})g(x'')\right|\le$$

$$\le\left|F(x'')\cdot g(x'')-F(x')\cdot g(x')\right|+\left|F(c_{x'x''})\right|\left|g(x')-g(x'')\right|\le$$

$\le\left|F(x'')\cdot g(x'')\right|+\left|F(x')\cdot g(x')\right|+\left|F(c_{x'x''})\right|\cdot[\left|g(x')\right|+\left|g(x'')\right|]$. Por outro lado, recordamos que $\lim_{x\to\infty}g(x)=0$ e $F(x)$ limitada, se tem ainda que:

$$\le\left|F(x'')\cdot g(x'')\right|+\left|F(x')\cdot g(x')\right|+\left|F(c_{x'x''})\right|\cdot[\left|g(x')\right|+\left|g(x'')\right|]$$
$$\le M\left[\left|g(x'')\right|+\left|g(x')\right|\right]+M\cdot[\left|g(x')\right|+\left|g(x'')\right|]=2M\cdot[\left|g(x')\right|+\left|g(x'')\right|]$$

Mas dado este $\varepsilon>0$, existe $\delta(\varepsilon)>0$, tal que $\left|g(x)\right|<\varepsilon/4M$. Segue que: $\left|\int_{x'}^{x''}f(x)g(x)dx\right|\le 2M\cdot[\left|g(x')\right|+\left|g(x'')\right|]\le 2M\cdot[\frac{\varepsilon}{4M}+\frac{\varepsilon}{4M}]=\varepsilon$, para $x',x''\in[\delta,\infty)$.

O teorema 6 é uma contribuição de Niels Henrik Abel (1802-1829).

Teorema 6 (Teste de Abel): Assumindo que as funções f e g definidas em $[a,\infty)$ e satisfaz as seguintes condições: (i) g é monótona e limitada em $[a,\infty)$; (ii) a integral imprópria $\int_a^{\infty}f(x)dx$ é convergente. Então $\int_a^{\infty}f(x)g(x)dx$ converge.

Usaremos o teste anterior para verificar o enunciado acima. Com efeito, dado $\varepsilon>0$, desde que g é limitada (i), existe $M>0$ tal que $\left|g(x)\right|\le M$, $\forall x\in[a,\infty)$. Desde que $\int_a^{\infty}f(x)dx$ converge (ii), pelo critério de Cauchy, existe $A>0$, tal que $t_1,t_2>A$ e temos $\left|\int_{t_1}^{t_2}f(x)dx\right|<\varepsilon/2M$. Agora, usando o teorema do Valor Médio para integrais e quaisquer $t_1,t_2>A$, existe um $c\in IR$ entre t_1 e t_2, de modo que: $\int_{t_1}^{t_2}f(x)g(x)dx=g(t_1)\int_{t_1}^{c}f(x)dx+g(t_2)\int_{c}^{t_2}f(x)dx$. Segue que $\left|\int_{t_1}^{t_2}f(x)g(x)dx\right|\le$

$$\le\left|g(t_1)\right|\left|\int_{t_1}^{c}f(x)dx\right|+\left|g(t_2)\right|\left|\int_{c}^{t_2}f(x)dx\right|<\left|g(t_1)\right|\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+\left|g(t_2)\right|\cdot\varepsilon/2M<\varepsilon.$$

Nosso último teorema realiza a importante ligação conceitual entre séries de números reais e a integral generalizada.

Teorema 7 (Colin Maclaurin/1698-1746): Seja $f(x)\ge 0$ não crescente em $[1,\infty)$ então $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)<\infty\Leftrightarrow\int_1^{\infty}f(x)dx<\infty$.

Dem. Desde que $f(x) \geq 0$ e assumindo que f é localmente integrável, podemos assegurar que estão definidos os seguintes objetos $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{f(k)}$. Precisamos, pois, mostrar que um termo é finito se, e somente se, o outro também é. Desde que $f(x) \geq 0$ não crescente em $[n-1, n]$ escrevemos $0 \leq f(k) = \inf_{[k-1,k]} f \leq \int_{k-1}^{k} f(x)dx \leq \sup_{[k-1,k]} f = f(k-1)$. Segue que $\int_1^n f(x)dx = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)dx \leq \sum_{k=2}^{n} f(k-1) = f(1) + f(2) + \cdots f(n-1)$ (*). Por outro lado, temos ainda que $\int_1^n f(x)dx = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)dx \geq \sum_{k=2}^{n} \inf_{[k-1,k]} f = \sum_{k=2}^{n} f(k) = f(2) + f(3) + \cdots + f(n)$ (**).

Passando agora $n \to +\infty$ de (*) e (**) estabelecemos: $\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{f(k)} - f(1) \leq \int_1^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$.

Por fim, de (***), afirmamos que $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx < \infty$.

Teorema 8 (teorema do Sanduíche para integrais impróprias). Sejam $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, \infty)$ e f, g, h localmente integráveis. Se as integrais $\int_a^{\infty} h(x)dx$ e $\int_a^{\infty} g(x)dx$ convergem, então $\int_a^{\infty} f(x)dx$ convergirá.

Dem. Dem. Neste caso, quando admitimos $h(x) \leq f(x) \leq g(x) \leftrightarrow 0 \leq f(x) - h(x) \leq g(x) - h(x)$. Mas daí, supondo que $\int_a^{\infty} h(x)dx$ e $\int_a^{\infty} g(x)dx$ convergem, então, poderemos lidar com a seguinte desigualdade $0 \leq \int_a^{\infty} [f(x) - h(x)]dx \leq \int_a^{\infty} [g(x) - h(x)]dx$. Pelo critério da comparação I, $\int_a^{\infty} [f(x) - h(x)]dx$ converge. Outrossim, escrevemos:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_a^{\infty} [f(x) - h(x) + h(x)]dx = \underbrace{\int_a^{\infty} [f(x) - h(x)]dx}_{converge!} + \underbrace{\int_a^{\infty} h(x)dx}_{hipótese}.$$

Finalmente, $\int_a^{\infty} f(x)dx$ convergirá também.

Exemplo: Vamos considerar $-1 \leq sen(x) \leq 1 \therefore -\frac{1}{x^2} \leq \frac{sen(x)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$. Daí, poderemos inferir o comportamento da integral $\int_a^{\infty} \frac{sen(x)}{x^2}dx$, sabendo que as integrais $-\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ e $\int_a^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$ convergem. Diferentemente do teorema do sanduíche, versão para limites, no caso do teorema 7, depreendemos que a integral converge, todavia, nada se sabe o valor e nem muito menos precisa ser o mesmo valor das outras duas.

No próximo segmento, proporcionamos a visualização e a descrição de caracteres qualitativos concernente ao conceito de integral generalizada.

3. Situações envolvendo o uso do *Software Geogebra*

O *software Geogebra* possibilita uma análise diferenciada de muitos problemas envolvendo a noção de integral imprópria. Por exemplo, quando consideramos a seguinte integral $\int \frac{\ln(x)dx}{(1+x)^2}$ e, de acordo com uma inspeção da região do plano, identificamos a necessidade do emprego da noção de integral imprópria.

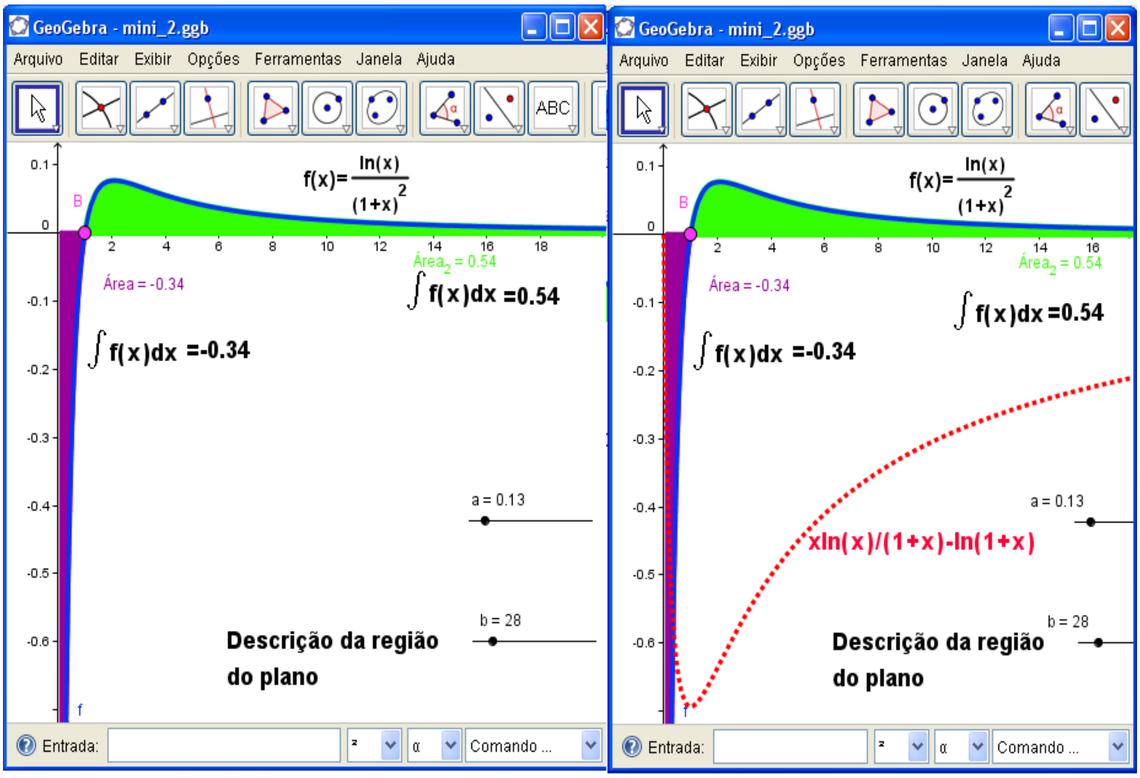

Figura 2. Interpretação gráfico-geométrica com o *Software Geogebra*

Assim, com base na figura acima, depreendemos que lidamos com a possibilidade do uso de duas integrais $\int_0^1 \frac{\ln(x)dx}{(1+x)^2}$ e $\int_0^1 \frac{\ln(x)dx}{(1+x)^2}$. Do ponto de vista analítico, de modo standard, escrevemos: $\int \frac{\ln(x)dx}{(1+x)^2} \overset{\text{integração}}{\underset{\text{por partes}}{=}} -\frac{\ln(x)}{1+x} + \int \frac{dx}{x(1+x)} = -\frac{\ln(x)}{1+x} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right)dx$. No caso de $\int_0^1 \frac{\ln(x)dx}{(1+x)^2} = -\ln(2) - \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x\cdot\ln(x)}{1+x} - \ln(1+x)\right) = -\ln(2) - 0 = -\ln(2)$.

Vamos tomar as seguintes funções $f(x) = e^{-x^2}$ e $g(x) = \sqrt{-\ln(x)}$. Assinalamos que para $x \geq 0 \therefore y = e^{-x^2} \leftrightarrow \ln y = \ln e^{-x^2} = -x^2 \cdot \ln e \leftrightarrow -\ln y = x^2 \leftrightarrow \sqrt{-\ln y} = x$. Do ponto de vista analítico, inferimos que $x \geq 0 \therefore y = e^{-x^2} \leftrightarrow \sqrt{-\ln y} = x$. Agora podemos comparar as integrais $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^1 \sqrt{-\ln(x)}dx$. Com o *software Geogebra*, inferimos seu comportamento numérico.

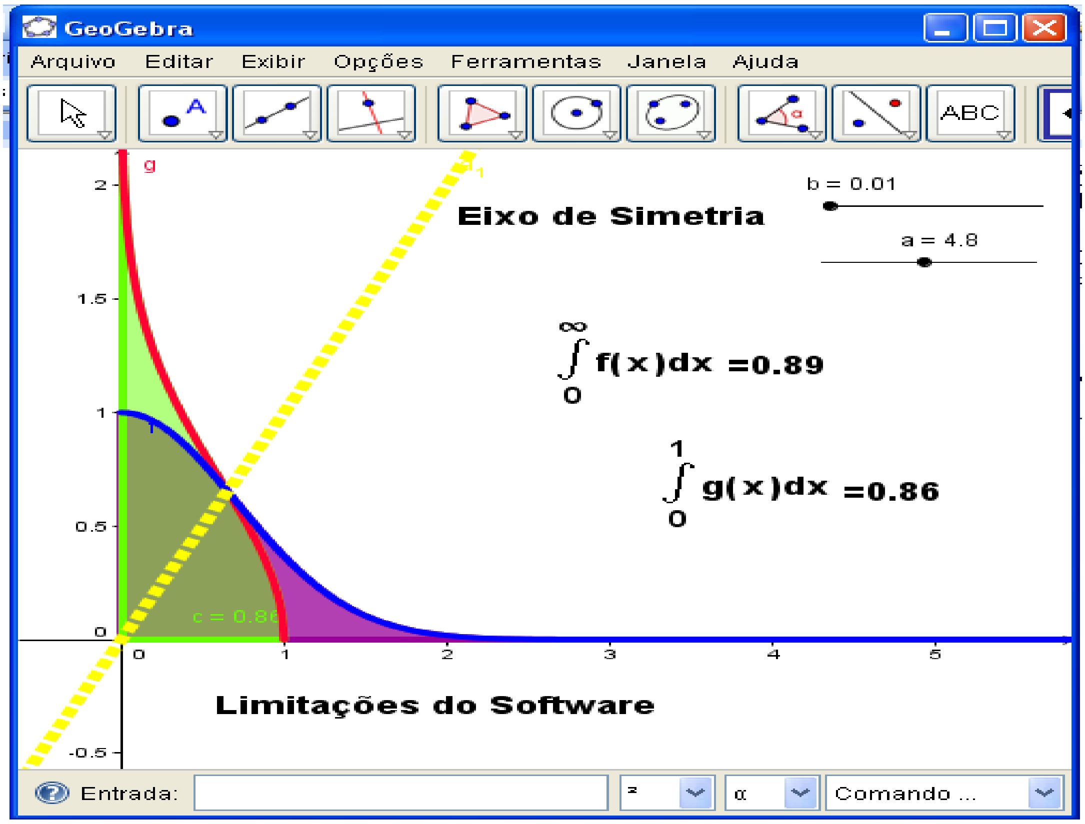

Figura 3. Indicações de limitação do *software Geogebra*

Vamos considerar a seguinte integral $\int_0^\infty x^n \cdot e^{-x}dx = -x^n \cdot e^{-x}\,|_0^\infty + n\cdot\int_0^\infty x^{n-1}\cdot e^{-x}dx$ (*). Tal igualdade por ser obtida por meio da seguinte substituição: $\begin{cases} u(x) = x^n \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \therefore \begin{cases} u'(x) = nx^{n-1}dx \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$. Usando a substituição por partes, escrevemos ainda que $\int_0^\infty x^n \cdot e^{-x}dx = uv - \int vdu = x^n\cdot(-e^{-x}) + n\int e^{-x}x^{n-1}dx$. Ou ainda, teremos $\int e^{-x}x^n dx = x^n \cdot (-e^{-x}) + n\int e^{-x}x^{n-1}dx$. Daí, de acordo com a definição, escrevemos (*). Tal integral foi objeto estudada por Euler, e surge em sua obra intitulada *De Differentiatione Functionum Inexplicabilium*, em 1755.

Vamos definir $I_n := \int_0^\infty x^n \cdot e^{-x}dx$ [2] e, notando que as funções integrandas são positivas. Definimos, pois, as seguintes funções $F_n(\alpha) = \int_0^\alpha x^n \cdot e^{-x}dx$. Podemos inferir que a sequência $\{F_n(\alpha)\}_{n\in IN}$ é crescente, isto é, se $\alpha_1 < \alpha_2 \therefore F_n(\alpha_1) < F_n(\alpha_2)$. Daí, podemos esperar que tenhamos um limite finito ou diverge para $+\infty$. Ora, usando que $\lim_{x\to\infty}\int e^{-x}x^n dx = \lim_{x\to\infty} x^n \cdot (-e^{-x}) + n\cdot\lim_{x\to\infty}\int e^{-x}x^{n-1}dx = 0 + n\cdot\lim_{x\to\infty}\int e^{-x}x^{n-1}dx$. Portanto, estabe-

[2] No livro de Shacarchi (1998, p. 219) encontramos um critério que generaliza o modelo em torno da integral de Euler. O autor descreve a convergência absoluta de integrais do tipo $\int_0^\infty P(x)\cdot e^{-ax}dx$.

lecemos que $\lim\limits_{x\to\infty}\int e^{-x}x^n dx = n\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\int e^{-x}x^{n-1}dx \leftrightarrow I_n = n\cdot I_{n-1}$. Reparemos, todavia, que usamos o fato de que $\lim\limits_{x\to\infty} x^n\cdot(-e^{-x}) = 0$.

De outro modo, consideremos a seguinte integral $\int_0^\infty e^{-x}\cdot x^{p-1}dx,\ p>0$. Reparemos que podemos obter uma desigualdade da seguinte maneira $e^{-x}\cdot x^{p-1} < \dfrac{c}{x^r}$, com $r>1$. De fato, vejamos que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2\cdot e^{-x}\cdot x^{p-1}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^{p+1}}{e^x}\right) = 0$. Assim, dado $\varepsilon>0$, existem um número real $M>0$ tal que $x>M \to x^2\cdot e^{-x}\cdot x^{p-1} < \varepsilon \therefore e^{-x}\cdot x^{p-1} < \dfrac{\varepsilon}{x^2}$. Portanto, pelo critério da Comparação, sabendo que $\int_1^\infty \dfrac{\varepsilon}{x^2}dx$ converge, então $\int_0^\infty e^{-x}\cdot x^{p-1}dx,\ p>0$ deverá convergir. Daí, podemos definir $\Gamma(p) := \int_0^\infty e^{-x}\cdot x^{p-1}dx$ (função de $p>0$) chamada de função Gama.

Facilmente verificamos a propriedade: $\int e^{-x}\cdot x^{p-1}dx \underset{\begin{cases} u=x^{p-1} \\ dv=e^{-x}dx \end{cases}}{\overset{\textit{Por}\ \text{partes}}{=}} -e^{-x}\cdot x^{p-1} + (p-1)\int e^{-x}\cdot x^{p-2}dx$. Portanto, estabelecemos $\int_0^b e^{-x}\cdot x^{p-1}dx = \overset{b\to\infty}{\underbrace{(-e^{-x}\cdot x^{p-1})\,|_0^b}_{\left[\frac{-b^{p-1}}{e^b}\right]\to 0}} + (p-1)\cdot\int_0^b e^{-x}\cdot x^{p-2}dx$. Daí, escrevemos ainda que $\Gamma(p) = \lim\limits_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\cdot x^{p-1}dx = \lim\limits_{b\to\infty}(p-1)\cdot\int_0^b e^{-x}\cdot x^{p-2}dx = (p-1)\cdot\Gamma(p-1)$.

Prosseguindo, indutivamente, que vale $\Gamma(p) = (p-1)!$

Com base nessa ultima relação, inferimos que $\int_1^\infty e^{-x}x^4dx = \Gamma(5) = 4! = 24$ e $\int_1^\infty e^{-x}x^1dx = \Gamma(2) = 1! = 1$ e também que $\int_1^\infty e^{-x}x^0dx = \Gamma(1) = 0! = 1$. Usando, por fim, o fato de que $I_0 = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1$. Concluímos, pois, que I_n converge e vale $I_n = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n!$. Temos aqui uma definição sofisticada para o símbolo n!

Vamos considerar a integral de Bertrand, descrita por $\int_1^\infty \dfrac{dx}{x^n\cdot(\ln(x))^{-1}}$ que converge se, e somente se $n\ge 2$. Com efeito, vamos tomar a integral $\int\dfrac{\ln(x)dx}{x^n} = \dfrac{x^{-n+1}}{-n+1}\cdot\ln(x) - \int\dfrac{x^{-n+1}}{-n+1}\cdot\dfrac{1}{x}dx = \dfrac{x^{-n+1}}{-n+1}\cdot\ln(x) - \dfrac{x^{-n+1}}{(n-1)^2}$, onde $\begin{cases} u(x)=\ln(x) \\ v'(x)=x^{-n} \end{cases} \therefore \begin{cases} u'(x)=1/x \\ v'(x)=x^{-n+1}/-n+1 \end{cases}$.

Por fim, obtemos que $\int_1^\infty \dfrac{dx}{x^n\cdot(\ln(x))^{-1}} = \lim\limits_{t\to+\infty}\left[\dfrac{x^{-n+1}}{-n+1}\cdot\ln(x) - \dfrac{x^{-n+1}}{(n-1)^2}\right]_1^t = \dfrac{1}{(n-1)^2}$.

Vamos descrever o comportamento da integral de Dirichlet $\int_0^\infty \frac{sen(x)dx}{x}$. Veremos que a mesma converge, mas não converge absolutamente. Usando integração por partes, estabelecemos $\int_0^x \frac{sen(t)dt}{t} = -\frac{\cos(t)}{t}\Big|_1^x - \int_0^x \frac{sen(t)dt}{t^2}$. No que segue, analisamos o comportamento de $\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{\cos(t)}{t}\Big|_1^x - \int_0^x \frac{sen(t)dt}{t^2}\right)$.

Todavia, por intermédio do *software Geogebra*, prevemos que o limite de cada termo converge, quando $x \to \infty$.

Por outro lado, vejamos que $\int_0^\infty \frac{|sen(x)|\,dx}{x}$ não converge. Com efeito, verificamos que $\int_{2\pi}^\infty \frac{|sen(x)|\,dx}{x} = \sum_{n=1}^\infty \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \frac{|sen(x)|\,dx}{x}$. Agora, notamos que $x \to \infty\ (x >> 1) \therefore \frac{1}{x} < 1$. Daí, escrevemos: $\sum_{n=1}^\infty \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \frac{|sen(x)|\,dx}{x} > \sum_{n=1}^\infty \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \frac{|sen(x)|\,dx}{2\pi(n+1)}$.

Agora, observando que em cada intervalo $[2n\pi, 2(n+1)\pi]$ cada integral terá valor constante, pois a função em questão é periódica, de período π. Por fim, assumindo que seu valor é C, escrevemos: $\sum_{n=1}^\infty \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \frac{|sen(x)|\,dx}{x} > \sum_{n=1}^\infty \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \frac{|sen(x)|\,dx}{2\pi(n+1)} = \sum_{n=1}^\infty \frac{C}{2\pi(n+1)}$. Mas, sendo a série harmônica (divergente). Concluímos que $\int_0^\infty \frac{|sen(x)|\,dx}{x}$ não poderá convergir!

Para concluir, vamos considerar a astróide descrita por $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$ $(\text{a}>0)$. De imediato, com base em seu comportamento, divisamos as quinas em que não contamos com a diferenciabilidade.

Assim, escrevemos:

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2} \therefore y' = -\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}} \to \sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\left(-\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}}\right)^2} = \sqrt{\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2}}} = \sqrt{\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{x^2}}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{x}}.$$

Por fim, calculamos seu comprimento:

$$L = 4 \times \sqrt[3]{1}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = 4 \cdot \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = 4 \cdot \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 x^{-1/3} = 6.$$

A Cissoide em termos de coordenadas cartesianas é descrita por $y = x^{3/2} \cdot (1-x)^{-1/2}$. Edwards (1979, p. 177) apresenta a seguinte integral $A = \int_0^1 x^{3/2} \cdot (1-x)^{-1/2}\,dx$. Na ocasião, o autor emprega o método da *Quadratura da Cissóide*, empregado por Wallis, em 1659.

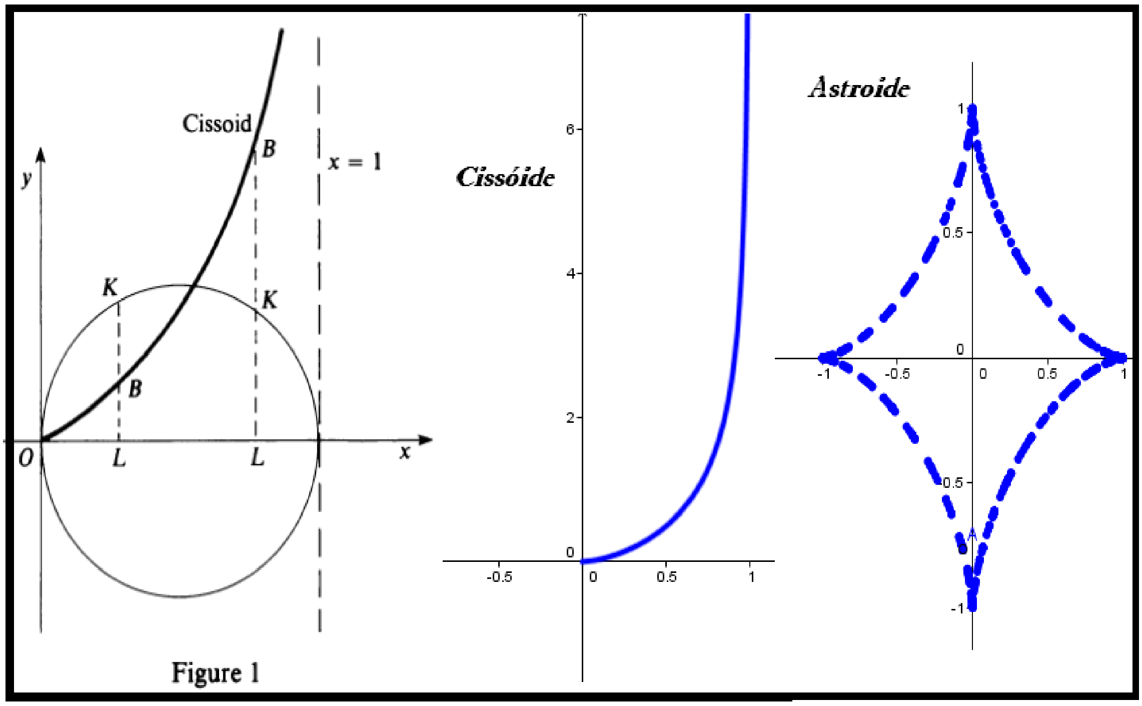

Figura 4. Edwards (1979, p. 177) aplica a noção de integral imprópria para determinar se a integral converge

Na figura 4, trazemos a *Astróide* descrita pelo *Geogebra* e a *Cissoide*. No caso da integral indicada por $A=\int_0^1 x^{3/2}\cdot(1-x)^{-1/2}\,dx$ podemos obtê-la, por intermédio de algum método analítico apropriado. Não obstante, no caso da equação $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=1$, temos uma equação descrita de modo implícito nas variáveis 'x' e 'y'. Daí, como indicamos há pouco e, tendo em vista a simetria da figura (lado direito, fig. 4), efetuamos a multiplicação por 4.

Na próxima seção, sublinharemos possíveis interpretações gráfico-geométricas com o *CAS Maple*. Não pretendemos o domínio de sua sintaxe ao decorrer do minicurso, embora, os comandos envolvidos sejam de plotagem de gráficos e que não requerem grande conhecimento de programação por parte de aluno ou professor.

4. Situações envolvendo o uso do *CAS Maple*

Gonzalez-Martín (2005, p. 82) acentua o embate filosófico entre o matemático John Wallis e o filósofo Thomas Hobbes em torno de determinada questões filosóficas. Dentre elas, se destaca o caso da trombeta do anjo Grabriel. Tal trombeta se constrói a partir da hipérbole $f(x)=1/x$. Gonzalez-Martín (2005, p. 82) explica que "é fácil compreender que a área superficial da trombeta é infinita; todavia, seu volume interior é finito." A parte destas características, a trombeta do anjo Gabriel possui ainda outras propriedades surpreendentes e imponderáveis.

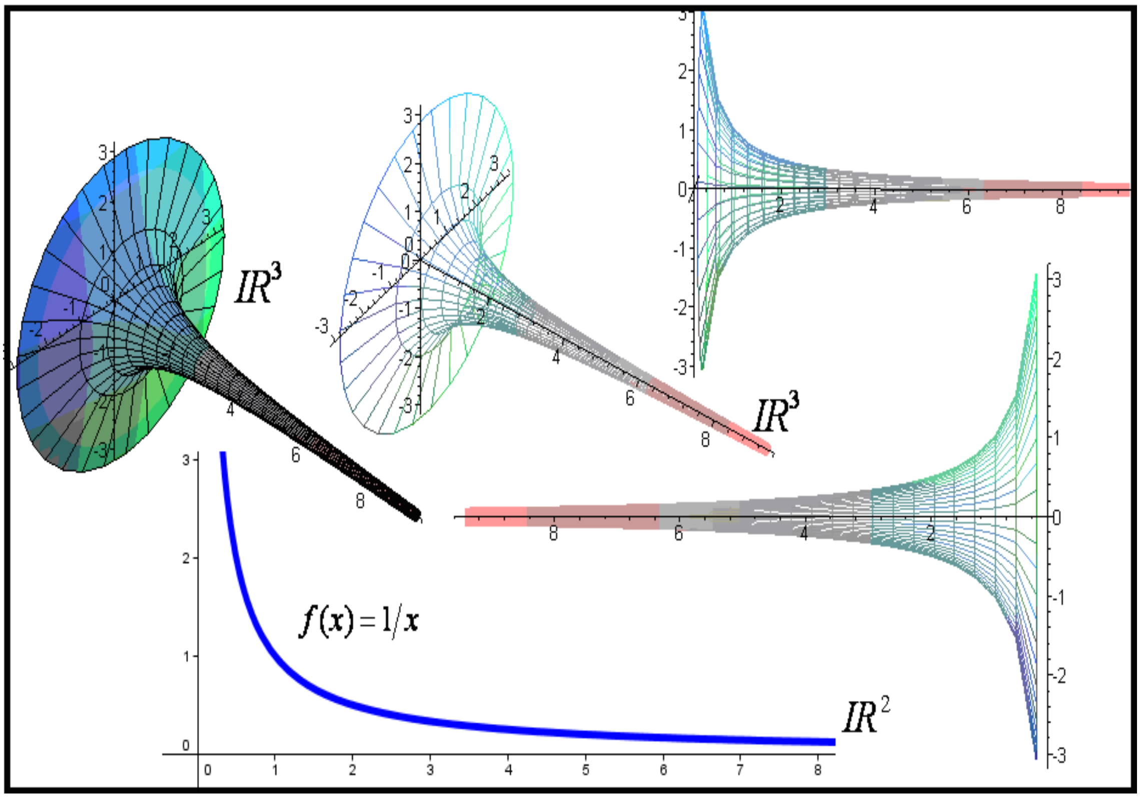

Figura 5. Descrição com o uso do *CAS Maple* da trombeta do anjo Gabriel

Nesse sentido, tal trombeta não possui embocadura e também não possui centro de gravidade. Propriedades como essas parecerem irrita o filósofo Thomas Hobbes. Nesse contexto, Imaz (2001, p. 307, APUD, GONZALEZ-MARTIN, 2004, p. 82) declarou que:

> Um sólido, ou superfície, pode ser supostamente constituído, de tal maneira que, é infinitamente larga, todavia, finitamente grande, sem possui centro de gravidade...como sucede com as descobertas de Wallis, Fermat e outros. Todavia, exige mais conhecimentos de Geometria e Lógica que dispõe o sr. Hobbes.

Historicamente, registramos muitas discussões sobre o entendimento em torno da noção de integrais impróprias. Hodiernamente, "não é de estranhar a dificuldade dos estudantes com respeito a esta noção" (GONZALEZ-MATÍN, 2005, p. 82). Na figura 5 destacamos a descrição/interpretação gráfico-geométrica da integral $\int_0^{\infty} \frac{sen(xy)}{xy}dx$. Nesse caso, passamos a considerar funções do tipo $F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ $(\mathrm{c} \le y \le d)$, com $f(x,y)$ contínua em $[a,b]\times[c,d]$. Portanto, a função F será contínua em $[c,d]$.

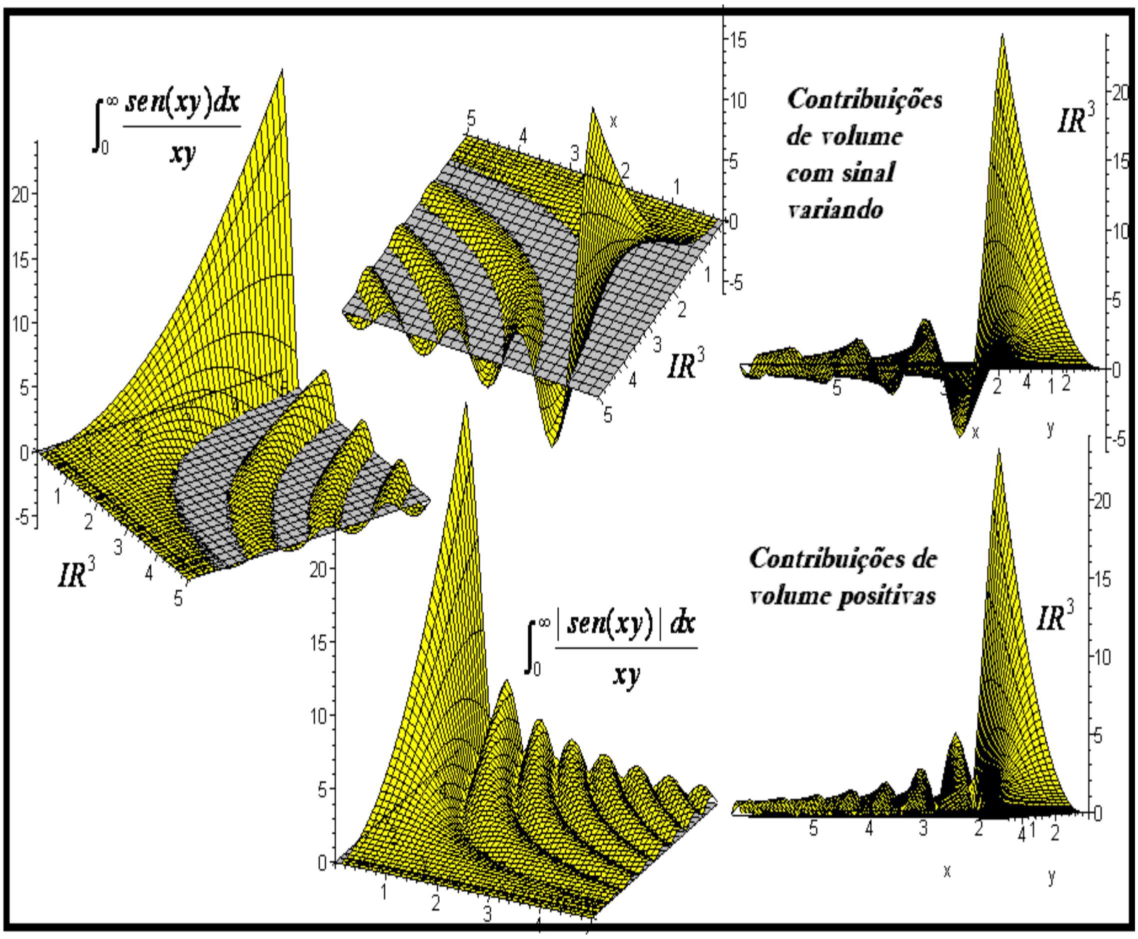

Figura 6. Descrição e interpretação da integral de Dirichlet no espaço IR^3

Na figura 5, comparamos, de modo qualitativo, o comportamento das integrais $\int_0^\infty \frac{sen(xy)}{xy}dx$ e $\int_0^\infty \frac{|sen(xy)|}{xy}dx$. O caráter que assinalamos é a relação conceitual que estabelecemos no contexto do IR^2 com o IR^3. Com efeito, pontuamos que a integral de Dirichlet converge, mas não converge absolutamente. O comportamento é semelhante no caso do espaço IR^3. Aqui, as contribuições de volume de $\int_0^\infty \frac{sen(xy)}{xy}dx$ tendem a diminuir, além de alternarem seu sinal. Todavia, as contribuições $\int_0^\infty \frac{|sen(xy)|}{xy}dx$ de volume de diminuem, mas com sinal apenas positivo. Seu decrescimento é lento, quando se afastamos da origem.

Trench (2012, p. 9) considera a seguinte função $F(y)=\int_0^\infty x^{-1/2}\cdot e^{-xy}dx$ e conclui que a integral diverge em $y\le 0$ e converge em $y>0$. Na figura 7, divisamos que as contribuições de volume tendem a diminuir, para $y>0$. Enquanto que as contribuições de volume tendem a crescer, na medida em que $y\to-\infty$. No plano ressaltamos o comportamento similar correspondente às áreas.

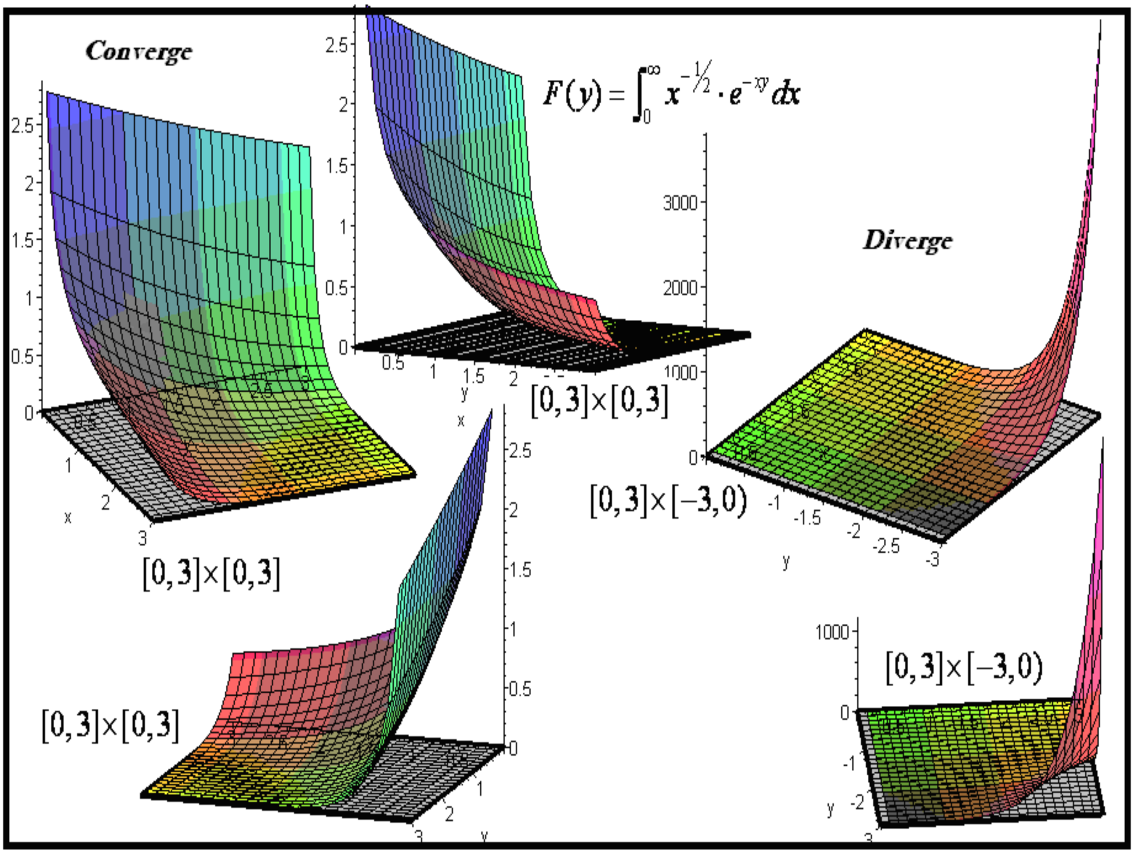

Figura 7. Discriminação da região do plano na qual a integral converge e diverge no espaço

Outro fator a ser compreendido diz respeito ao do resultado obtido por intermédio do uso dos critérios de convergência que apresentamos na seção 2. Tais critérios de convergência/divergência indicam o comportamento das integrais, entretanto, não indicam os valores numéricos assumidos por cada integral, nos intervalos considerados. Vejamos alguns valores numéricos assumidos pela integral $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ e $\int_0^\infty e^{-x}dx$. Ver tabela 1.

Tabela 1: Valores numéricos fornecidos pelo *software*

Valores de 'x'	$\int_0^\infty e^{-x^2}dx$	$\int_0^\infty e^{-x}dx$
0 - 5	0.8862269255	0.9932620530
0 - 10	0.8862269255	0.9999546001
0 - 20	0.8862269255	0.9999999979
0 - 20000	0.8862269255	1.

Fonte: Elaboração do autor.

5. Considerações finais

Nesse mini-curso trazemos o uso dos *softwares Geogebra* e do *CAS Maple* no sentido de ressignificar determinados problemas históricos e critérios de convergência e divergência, sob a ótica da tecnologia, no que concerne ao conceito de integral generalizada ou integral imprópria. Demarcamos, do ponto de vista histórico e epistemológico, determinados aspectos heurísticos e formais inerentes ao mesmo conceito. Alguns deles, sobretudo os que permitem uma interpretação heurístico-intuitiva, podem proporcionar entraves aos estudantes (GONZALEZ-MARTÍN, 2005). Por outro lado, buscamos evidenciar ao longo das atividades discutidas que, o uso de modo complementar, de ambos os *softwares*, viabiliza o entendimento que supera os condicionantes do formalismo estrutural, característico do pensamento bourbakiano.

Por fim, quando permitimos a tecnologia afetar nossa mediação, vislumbramos a exploração de determinados aspectos qualitativos, que podem atuar de modo produtivo no processo de aprendizagem e que, todavia, se mostram inexequiveis de serem promovidos, quando negligenciamos o uso de *softwares* para o ensino de Matemática e, de modo particular, do Cálculo (ALVES, 2012, p. 18).

6. REFERÊNCIAS

Alves. F. Regis. Transição interna do Cálculo: uma discussão do uso do GeoGebra no contexto do Cálculo a várias variáveis. In: Revista do Instituto Geogebra Internacional de São Paulo. v. 1, nº 2, p. 5-19. 2012. Disponível em: http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/index

Bloch, Ethan. D. *The Real Number and the Real Analisys*. New York: Springer, 2011.

Boyer, Carl. The History of the Calculus and its Conceptual Development, New York: Dover Publications, 1949.

Bottazzini, Umberto. The Higher Calculus: a history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass. New York: Springer, 1986.

Cavaillés, Jean. *Philosophie des Mathématiques*. Paris: Hermann, 1962.

Dugac, Pierre. Histoire de L`analyse: autour de la notion de limite et de voisinage. Paris : Edition Vuibert, 2003.

Edwards, C. H. Jr. The HIstorical development of Calculus. London: Springer-Verlag, 1979.

Figueiredo, Djairo, G. *Análise I*. 2ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

Gonzalez-Martín, Alexandro. S. La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y de aprendizaje (teses doctorales). Laguna: Universidad La Laguna. 2005, 498f.

Grabiner, Judith. The origins Cauchy´s Rigorous Calculus. New York: Dover Publications, 1981.

Grattan-Guiness. Ivor. The development of the Foundations of Mathematical Analisys from Euler to Riemann. Massachusetts: MIT Press, 1970.

Hairer, E. & Warner, G. Analysis by Its History, New York: Springer, 2008.

Lima, Elon. Lages. *Análise Real*. v. 1, Rio de Janeiro: SBM. 2005, 148f.

Medeiros, Paulo. A. Centenário da Integral de Lebesgue. Rio de Janeiro: UFRJ.2002. Disponível em:

http://www.uff.br/dalicenca/images/stories/caderno/volume5/Centen_Int_Lebesgue.pdf

Shacarchi, Rami. Problems and Solutions for Undergraduate Analysis. New York: Springer, 1998.

Strichartz, Robert. The Way of Analysis. London: Jones and Barttle Publishers, 2000.

Trench, William. Functions defined for Improper Integrals. Texas: Trinity University, 2012.