O ESTATUTO DO DIAGRAMA NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Gerard Emile Grimberg

PEMAT-IM-UFRJ

Gerard.emile@terra.com.br

Para determinar as condições de implementação de software de geometria dinâmica no ensino da matemática é necessário questionar a história da matemática quanto ao papel do diagrama na prática dos matemáticos. Este miniscurso pretende estudar alguns casos de utilização de diagramas no decorrer da história da geometria: 1) Os Elementos *de Euclides; 2) A geometria de Descartes; 3) A geometria projetiva no século XIX; 4) a construção de modelos das geometrias não-euclidianas. Em cada caso, o diagrama desempenha um papel diferente. Em Euclides, o diagrama acompanha o texto de cada proposição instaurando um discurso que vem estruturando o raciocínio. O diagrama e o texto se interelacionam e constituem os dois polos necessários do raciocínio dedutivo. Em Descartes o diagrama vem descrevendo as operações algébricas que permitem constRuir as curvas algébricas. A geometria projetiva (Poncelet) torna o diagrama dinâmico pois se discuta a respeito de uma figura o que advem se enviarmos alguns pontos ou reta ao infinito. Uma outra postura norteia os matemáticos (Beltrami, Klein e Poincaré) quando se trata construir modelos da geometria Euclidiana. Todas essas práticas diferentes de emprego do diagrama abrem reflexões sobre o emprego dos sofwares em sala de aula.*

Palavras-chaves: História da matemática, Diagramas matemáticos, representação na matemática.

INTRODUÇÃO

O estatuto do diagrama na matemática sofreu várias transformações no decorrer da evolução da matemática. Nos pretendemos neste minicurso dar conta de algumas etapas da transformações, tomando alguns exemplos que marcaram a história da geometria, espcialmente *Os Elementos* de Euclides, A geometria de Descartes e as diversas vvisões geométricas dos números complexos. Serão estudados neste minicurso textos de Euclides, Descartes, Wessel, Argand, Hamilton e Gauss.

O DIAGRAMA NOS *ELEMENTOS* DE EUCLIDES

Os trabalhos de Reviel Netz (2000 e, 2004) e de Ken Saito (2006, 2007, 2008) colocaram uma questão nova no que diz respeito o papel dos diagramas nas matemática grega em geral e especialmente nos *Elementos* de Euclides. Reviel Netz e Ken Saito apontaram a necessidade de tratar os diagramas como o texto à leitura crítica. Entre o texto e o diagrama aparecem uma diferença de conteúdo. A informação contida no texto não é conforme o que o diagrama apresenta, ou em outras ocasões, o diagrama contem informação que não constam no texto. Este artigo tem por objetivo de discutir esta relação tão difícil entre o texto e o diagrama. Nos estudaremos 1) O que é um diagrama em Euclides ? 2) O estilo do texto, e o estilo dos diagramas; como texto. 3) Oralidade e textualidade em Alexandria.

1) O que é um diagrama em Euclides ?

Primeiro o verbete diagrama não faz parte da terminologia euclidiana. Como o ressalta Netz (2004, p.36) Para designar um diagrama, Euclides utiliza *katagraphé* (Euclides III-33) e também o verbo *katagraphein* (por exemplo II-7 e II-8). Platão e Aristoteles utiliza diagrama para designar as proposições matemáticas. No primeiro sentido da palavra, diagrama significa um desenho, realizados por meio de linhas (dia grammé), o que permite Netz observar que nos textos gregos diagrama é uma metonimia de proposição. Essa metonimia demonstra a importância na geometria e nas proposições matemática do diagrama. O diagrama parece assim representar o coração da proposição.

Como aparece o diagrama numa proposição de Euclides. Proclus (203-204) distingue seis momentos da proposição: a prótasis (enunciação), a echtesis (exposição), o diorismós (a determinação), a kataskeuè (construção auxiliar), a apódeixis (demonstração) e a sumpérasma (a conclusão). Não sabemos se esta terminologia era já utilizada antes de Proclus mas o que ela descreve corresponde à estrutura objetiva da proposição em Euclides. O que denote esta terminologia é que esta estrura era ensinada como a de qualquer proposição matemática.

Devemos observar que a construção auxiliar nem sempre está presente numa proposição. Se trata de um construção suplémentar, isso é, que não consta na exposição mas que é necessária para a implementação da demonstração. Outro aspecto é que como o ressalta Proclus tem dois tipos de proposições: as proposições problemas e as proposições teoremas. Um problema é essencialmente nos Elementos de Euclides um problema de construção (por exemplo construir a reta que divide um ângulo em duas partes iguais). Neste tipo de proposição, a construção auxiliar representa o alvo apontado pela proposição, e a demonstração é uma justificativa do bem fundado da construção. No caso de um teorema que é uma proposição visando a demonstrar um certa propriedade possuido por um objeto, a construção auxiliar indica o caminho da demonstração.

O segundo e quarto momento da proposição dizem respeito ao diagrama: a exposição e a construção auxiliar. O interessante é que nessa se descreve atividades como “seja traçada a reta AB” e, o emprego nos verbos do imperativo perfeito passivo indica que as ações são já realizadas Heath (1908, p. 242) e que o desenho está feito antes de iniciar a demonstração.

Mas o processo de construção dos diagramas segue as regras estrictas ditadas pelos postulados e as três primeiras proposições de Euclides. Os postulados indicam 1) a possibilidade de traçar uma reta de um ponto a um outro[1], 2) de prolongar continuamente uma reta[2], 3) traçar um circulo a partir de um ponto tomado por centro e de um intervalo ligando o centro a um outro ponto[3]. Os dois outros postulados afirmam também propriedades ligadas às construções: 4) que os ângulos retos são todos iguais entre si assegura que uma vez construidas perpendiculares as retas distinctas, os ângulos descritos serão iguais. O quinto postulado enuncia uma condição de encontro de duas retas e logo a possiblidade de considerar o ponto de encontro. As três primeiras propriedades são também essenciais aos diagramas, construir um triângulo equilateral, traçar

[1] Fique postulado traçar um reta de todo ponto até todo ponto, trad. Bicudo, p. 98.
[2] Tambem prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta, trad. Ibid.
[3] E que com qualquer centro e qualquer intervalo se descreva um círculo, seguindo a trad. De comandino pelas razões avançadas por Vitrac (1990, p. 169, n. 8).

a partir de um ponto um segmento igual a uma reta dada, construir o segmento diferença entre dois segmentos dados. Estas três proposições aparecem em várias proposições dos Elementos: por exemplo são utilizadas em 10 proposições do livro I e 5 proposições do livro II.

O que compôe um diagrama não são os objetos da geometria, isto é, as figuras (*schémata*). "Uma figura é o que é contido por alguma ou algumas frontairas", (def. 13, trad. Bicudo, p. 97). Os objetos são definidos pelos limites: um segmento pelos pontos, um círculo pela sirconferência, um quadrilátero pelos quatro lados, etc. Mas esses linites são apenas representados. Com efeito "um ponto é aquilo de que nada é parte", diz a primeira definição dos *Elementos*. Nos diagramas os pontos são representados por traços materiais, isto é, com uma certa espessura. Na realidade os objetos considerados, pontos, segmentos, círculos estão ausentes dos diagramas mas são duplamente representados pelos traços e pelas letras. Neste aspecto Euclides segue nem Platão nem Aristoteles pois, o objeto matemático pode ser uma ideia existente independentemente do espíritu (nous) ou produto pelo espíritu atraves do processo de separação da materia. Os objetos da matemática são em todos os casos objetos idéais. Isto implica que os diagramas não são mais os objetos mesmos mas uma representação que demanda uma interpretação, uma leitura. O diagrama é uma parte do texto e do discurso. Assim a observação de Ken Saito a respeito da edição dos diagramas de Euclides nos manuscritos arabes (Ken Saito, 2007, p. 2) toma uma significação profunda: "alem disso, em todos os manuscritos arabes e aqueles latinos traduzidos em arabe, a figura é inversada na direção horizontal e, como consequência, os pontos ADEZ se ordenam da direita à esquerda".

Con efeito, o sentido de leitura dos arabes sendo da direita à esquerda, é natural que os diagramas seja invertidos. O diagrama é portanto um texto. Mas apresenta diferença com o discurso das proposições na medida é que o fato de representado um todo acabado, ele perde a temporalidade e a dua genese de produção, o que está bem presente na ordem da exposição e da contrução auxiliar. Deste ponto de vista o diagrama tem valor de ideograma.

Por ser um ideograma, traçado antes da *echtesis* e da *kataskeuè* (Netz 2004, p. 83) o diagrama contem as vezes mais informação do que o texto. Assim distingue Netz nos diagramas do livro XIII de Euclides três tipos de letras: letras completament especificadas, as subspecificadas e as letras completamente subespecidifcadas. Completamente especificado é por exemple o ponto A designado na exposição como o centro do círculo. O círculo de raio AB já não menciona se A é o centro ou não do círculo, e portanto é uma letra subespecificada. Enfim se considera um círculo de raio AB e, acrescenta-se DB é igual a CD. A letra D é copmpletamente subespecificada. No livro três apenas 47 % da letras são completamente especificada. O diagrama contem portanto mais informação do que o texto. Netz estabelece assim a necessidade do diagrama para a compreensão do texto e a provável existência dos diagramas desde as primeiras edições dos *Elementos.*

Um outro aspecto importante dos diagramas nos manuscritos é analizado por Ken Saito (2006,2007). Os diagramas são muitas vezes "hiperespecificados", isto é, contem objetos com propriedades que prejudicam a generalidade considerada na proposição. Por exemplo o diagrama da proposição I.4. representa em vários manuscritos triângulos equilaterais, o diagrama da proposição I. 26 (terceiro caso de igualdade de triângulos) figura em um manuscrito triângulos equilaterais, e em outro triângulos retângulos, enfin o diagrama da proposição I.47. (o chamado teorema de Pitágoras) representa um triângulo retângulo isósceles. Saito (2007, p. 9) ressalta que as demonstrações não são afetadas por esta hiperespecificação e observa que "Uma tendência dos manuscritos é que eles tendem à simetria criando entre outros mais triângulos e trapezios isósceles" (Saito 2007, p. 9). A simetria diz apenas respeito a considerações estéticas e não matemáticas. Como se o copista estivesse mais preocupada pela beleza da figura do que o fato de estar conforme as propriedades estipuladas no texto. Uma outra razão da hiperespecificação dos diagramas seria que é de fato mais fácil construir um triângulo equilateral, isocéles ou retângulo do que um triângulo escalene. Assim o valor estético do diagrama parece superar o seu valor matemático. O diagrama aparece assim estilizado nos manuscritos. Esta consideração leva a investigar o estilo do texto e dos diagramas.

2) O estilo do texto, e o estilo dos diagramas.

O estudo de Reviel Netz revela vários aspectos do texto e do estilo de Euclides. Observa primeiro que o texto possui um vocabulário pequeno (algumas duzentas palavras para 95% do corpus da matemática grega). O texto é principalmente consituídos de fórmulas (aproximadamente 200 também) que dão conta, dos objetos geometricos envolvidos (pontos retas, círculos, etc.), da estrategia de demonstração (do mesmo modo, provar-se-ia, ainsi a propriedade , digo que, comme devia ser demonstrado,...), das conexões da argumentação (como...assim, etc...), das relações entre objetos (encontro de duas retas, um ponto sobre uma reta, etc.) Netz, 2004 p. 133-161.

O caráter formular do discurso em Euclides já tinha sido apontado por Heath. Por exemplo Heath explica o processo abreviativo que sofre a designação de um ângulo:

> "o ângulo BAC. A expressão grega completa seria be è *hypo tôn BA, AC periochoménè gonía*, o ângulo contido nas (linhas retas) BA, AC. Mas era uma prática comum entre os matemáticos gregos, por exemplo Archimedes and Apollonius (mas não em Euclides), de utilizar a expressão *ai BAC* para *ai (linas retas) BA, AC.* Então o verbo *periochoménè* sendo suprimido, a expressão torná-se-ia primeiro hè *hypo tôn BAC gonía*, depois hè *hypo BAC gonía* e, finalmente h è *hupo tôn BAC* sem *gonía* assim como encontramos regularmente em Euclides. Heath (1908,Vol I p. 249).

Do mesmo modo, os outros objetos são designados pelas letras que aparecem no diagrama. Em vez de "o ponto Z" Euclides escreve "tó Z". O artigo neutro basta para identificar o ponto, pois o verbete *semaion* é neutro. A reta AB é designado por hé AB, etc...

Este processo afasta ainda mais o discurso matemático da lingua comum e torna o texto lisível apenas pelo iniciado. A estructura do texto matemático mostra que na época de Euclides o vocabulário básico assim como as tornuras já eram fixadas.

Germaine Aujac [1984] estudou esta lingagem formular e aponta como uma das razões da importância da transmissão oral do saber (p. 107) o que nos leva a discutir a questão da relação entre o oral e a escrita no tempo de Euclides.

3) Oralidade e textualidade em Alexandria.

A época de Euclides que marca o início do desenvolvimento intelectual que segue a fundação de Alexandria marca também o nascimento das edições críticas. Um exemplo é a edição por Zenodoto da obra de Homero. Ele junta as diferenças versões, marca de signo distintivo as interpolações e publica um glossário. Outros se dedicam a edição das tragédias. A época de Euclides representa o período de fixação das obras clássicas. Onde o texto escrito supera a tradição oral. Não é por acaso que o primeiro texto matemático que chegou até nos seja oriendo deste período. Não significa que não houvesse antes obras escritos, mas sem este movimentos de intelectuais bibliotecários muitas obras seriam perdidas.

O que caracteriza o texto das proposição de Euclides é a repetição. As formúlas se repetem, o tconteudo mesmo da proposição é repetida a atraves dos seis momentos da proposição. A enunciação geral é seguida da exposição onde as hipóteses e a conclusão são separadas pelo diorismo sempre iniciado por "digo", no final da conclusão ainda o conteúdo do diorismo é repetido, enfim a conclusão repete a eununciação da proposição. Esta estrutura parece um canto ritmado pelo refrão.

Este é um aspecto que traduz uma vontade didática e podemos imaginar os alunos cantando uma proposição de Euclides tal como fariam para um canto de homero.

Neste decorar o diagrama tem também a sua função de apontar para os elementos cruciais da demonstração.

Reviel Netz observa que as fórmulas em Euclides não deve ter a mesma função do que em Homero onde o próprio do canto é a improvisação e as fórmulas ajudam a criação dos versos. Mas justamente em Alexandria, Homero já é fixado na escrita e os alunas devem decorar a versão escrita, respeitando a letra. O processo que leva às formúlas deve ser sem dúvida o mesmo já que Euclides representa sobretudo uma síntese do saber acumulado no período anterior.

Considerações sobre o estatuto do diagrama em Euclides

O diagrama em Euclides está intimamente ligado ao discurso dedutivo e, constitui uma parte essencial do processo dedutivo em dois pontos cruciais. Primeiro entrega à visão as hipóteses sobre as quais se elabora a demonstração. Segundo esboça por via da construção auxiliar os elementos que permitem desempenhar a demonstração. Acho que esses elementos são essenciais na formação do aluno no ensino fundamental assim como no ensino médio. Parece que está relação entre texto e o diagrama não é efetiva em sala de Aula. Quando raramente se cobra uma construção geométrica não se cobra ao lado uma justificativa escrita. São também poucas as demonstrações de propriedades nos exercícios e as vezes parecem ser muito artificias como se fosse apenas uma mera aplicação de um teorema enunciado em curso. Para dar um exemplo, os manuais que propõem exercícios a respeito dos casos de congruência são mera aplicação de caso e não leva à demonstrações de propriedades interessantes.

A GEOMETRIA DE DESCARTES

A Geometria de Descartes (1637) é um dos textos (com os de Viete) que transformam a relação entre texto e diagrama na matemática. Veremos três aspectos desta transformação ao descrever o conteúdo do primeiro e segundo livro de *A geometria*

O novo papel dos diagramas: dar conta das operações algébricas.

O início do primeiro livro de *A geometria* de Descartes é dedicado à representação geométrica das operações algébricas, soma e diferença, produto e divisão, e a extração das raizes. Este início marca uma diferença radical de perspectiva com Euclides. Nos Elementos se trata de demonstrar propriedades que dizem respeito ao objetos da geometria, pontos, retas, ângulo. A noção de operação envolve segmentos a somar ou substrair, ou ainda a comparar por via de razões. O conceito de número (exceito o de número que chamamos hoje de número natural) está ausente dos Elementos. O conceito de produto não é definido.

Uma das características do método de Descartes está na construção geométrica das operações. O produto está consttruido a partir de uma unidade e da propriedade de semelhânça. A raiz quadrado como uma media proporcional. Enfim Descartes contrói raizes de uma equação do segundo grau. Ou seja, Descartes começa por escrever uma equação como $z^2 \propto az + bb$. O problema consiste na construção das raizes. Assim o trabalho geométrico tem o seu início nas equações e não nos objetos geométricos e suas propriedades. Os objetos geométricos e suas propriedades são meras ferreamentas da representação das raizes.

O objeto do método de Descartes é a resolução de problemas que levam as equações e a determinação geométrica das soluções.

> "E pode-se reduzir assim todas as quantidades incógnitas à uma única, quando o problema pode se constuir por via de círculos e linhas retas, e também pro via de seções cónicas, ou mesmo por via de qualquer outra linha que seja apenas de um ou dois grau a mais composta.". Descartes (1637, p. 374).

O intuito de Descartes não é escrever um tratado de geometria mas sim de expor um método de resolução de problema.

Um problema crucial: o problema de Pappus.

Afim de mostrar a eficiência do seu método, Descartees expôe e resolve o famoso problema de Pappus que representava um desafio para os matemático do início do século XVII. Se trata de determinar o lugar geométrico dos pontos do palnos cujas distências a quatro retas dadas (Descartes irá generalizar o problema a um número qualquer de retas dadas) entre em uma certa relação algébrica. Descartes imagina o problema resolvida e considera um ponto da solução, referênciando este ponto por dois segmentos que ele designa por x e y. Isso leva a uma equação que determina uma certa linha curva Descartes (p. 400-401). Assim fica bem claro o método de Descartes: resolver um problema consiste em supor o problema resolvido e, caracterizando um ponto por dois segmentos, chegar à equação caracterizando o problema. Basta em seguida determinar a natureza da linha curva solução do problema.

Da natureza das linhas curvas

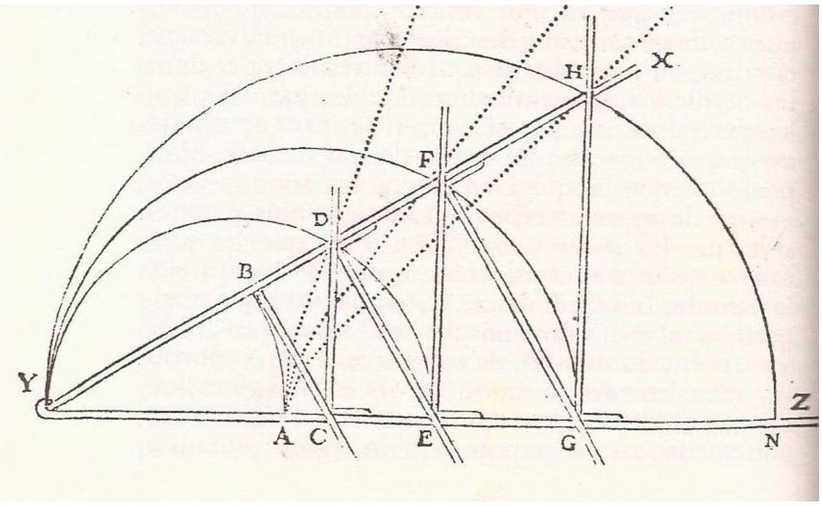
Este título é o do livro II de *A geometria* de Descartes e visa determinar as curvas que são caracterizadas por equações algébricas que define segundo Descartes o domínio de estudo da sua geometria.

> "Mas talvez o que inpediu os antigos geométros de aceitar aquelas (as curvas) que eram mais compostas que as seções cónicas, reside no fato de que as primeiras com que se

> defrentaram, sendo por acaso a espiral, a quadratriz, e semelhantes, que pertençam apenas as mecânicas, é fazem parte daquelas que penso dever aceitar aqui , pois que imagina-se-as como descritas por dois movimentos separados, que não tem relação entre eles, que se pode medir exatamente, apesar de ter estudado a concóide, a cissóide e poucas outras e, que não tem determinado as suas proriedades, não tenham aceito as últimas juntas com as outras. Descartes (1637, p. 392).

Descartes classifica as curvas segundo o critério do movimente. O seu intuito é dar conta du domínio das curvas geométricas (seguindo a terminologia de Descartes) que são caracterizadas por equações algébricas (polinomiais). A preoccupação de Descartes é não excluir as curvas de equação de grau superior a três, enquanto segundo Descartes os geomêtros gregos se limitavam ao estudo das curvos de grau 1, 2 ou 3 (Problemas lineares, planos e sólidos). Assim o domínio das curvas geoétrica está bem definido.

Esta caracterização das curvas geométricas leva a considerar novos instrumentos destinados a traçar curvas de grau superior a 3. Estes instrumentos completam as ferrementas já existentes (regua, compasso). Como aquele representado no livro II:



Esta ferramenta está constituído com duas vigas YX, YZ, a primeria girando em torno de Y, a segunda ficando imóvel. As outras solidárias deste movimento desenham triângulos retângulos semelhante, gerando assim curvas cujas equações são de grau superior a três.

O aspecto inovador desta teoria reside em uma relação entre euqações e construções geometricas que realizam uma extensão da geometria clássica grega e arabe. diagrama aqui desempenha o papel de descrever as curvas encontradas através de equações algébrica.

O terceiro livro se dedica sobretudo ao estudo das raizes de um polinômio e as operações ebvolvendo polinômios, especialmente o produto e a divisão.

Considerações sobre A geometrias de Descartes

Um dos aspectos talvez mais interessante do método de Descartes na resolução de problemas é que não tem um referencial arbitrário tal como aparece sempre nos manuais de geometria analítica. O início da análise de um problema é a escolha das incognitas adapatada à natureza do problema. O que chamamos hoje de coordenades de um ponto operam no problema de Pappus em um referencial afim, visto que os eixos não são perpendiculares. A álgebra seguem aqui a estrutura do problema. A escolha das incógnitas representa desta forma o equivalente da construção auxiliar nas demonstrações de Euclides.

Esta liberdade de escolha não aparece hoje nos manuais. Comme se um referencial era sempre ortonormado. Este dogmatismo é ensinado desde o ensino fundamental e, o mente do aluno não consiga fugir do ângulo reto e da geometria euclidiana mesmo se as propriedades estudadas são afins ou projetivas.

Outra consideração corresponde ao fato que qualquer relação algébrica (operação, raizes equação pode ser visualizada por via de diagrama, o que mostra o papel essencial que revete o ensino da geometria.

A VISÃO GEOMETRIACA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

O que entendemos na história da matemática como a representação geométrica dos números complexos abrange com efeito diferentes concepções elaboradas por diferentes matemáticos no fim do XVIIIème e na primeira metade do XIXème século. O artigo de Study traduzido por Cartan em 1908 na *Encyclopédie des Sciences mathématiques* cita quase todas as referências das obras e artigos onde figuram os diferentes pontos de vista Cartan-Study (1908). A nossa intenção não é fazer uma exposição exaustiva, mas apenas de tentar classificar estas diferentes representações de acordo com a sua problemática e o tipo de relação entre o diagrama geométrico e os números imaginários.

Wessel, Warren e Hamilton

O trabalho Wessel não foi conhecido da comunidade dos matemáticos antes do fim do século XIX quando foi descoberto e traduzido em Francês em 1897. Na sua memória, Wessel tenta determinar como pode-se conceber um cálculo de segmentos orientados. Define assim as operações sobre estes segmentos, e demonstra como estas operações sobre estes objectos geométricos podem ser reinterpretados associando à cada segmento um número imaginário Flament (2003 p. 110 e sq.). Com Wessel temos por conseguinte antes uma representação analítica de grandezas geométricas pelos números complexos. Wessel tenta além disso determinar números que corresponderiam aos segmentos orientados do espaço, mas encalha na sua tentativa.

A problemática Warren é análoga (Andersen [1999], p. 83), o seu ponto de partida é também um cálculo geométrico, e trata-se de representar os objetos geométricos e as suas operações por via dos números complexos. A sua originalidade é a relação que estabelece entre as rotações do plano e o produto de dois números complexos.

O encaminhamento de Hamilton (1837) é mais geral e a sua fundamentação da noção de número não é o espaço mas o tempo. A partir de uma noção intuitiva do tempo, constrói todos os números, com base nos números inteiros até iracionais que concebe como limite de números racionais. Para introduzir os números imaginários recorre à par ordenado de momentos, define as operações sobre estes pares e, mostra que têm as mesmas propriedades que as das operações sobre as quantidades imaginárias. Com efeito reconhece nos complexos um plano de dimensão dois, dado que o problema que Hamilton coloca nos anos que seguem é saber se o espaço possui também um cálculo análogo ao dos complexos, assim como ele relata:

> "Havia contudo um motivo que levava-me a unir uma importância específica à consideração de tripletes, separados de conjuntos mais gerais, dos quais deu-se conta. Era o desejo conectar, de acordo com um método útil e novo (ou pelo menos interessante), cálculo e geometria, através de alguma extensão não descoberta, ao espaço de três dimensões de um método de construção ou de representação, que foi empregada com sucesso pelo Sr. Warren e bem outros autores" Hamilton (1853, p. 31).

Mas neste sentido a diligência Hamilton junta-se a a de Wessel, trata-se de representar analitiquement os movimentos do plano e o espaço através de um cálculo algébrico.

Argand et Cauchy

O método de Argand (1806) e o objectivo do seu trabalho testemunham duna perspectiva diferente. Trata-se de dar um légimité dos números negativos e imaginários através de uma representação geométrica. Faz corresponder ao cada número imaginário uma linha orientada, e explica a significado geométrica que pode-se tirar operações sobre as grandezas imaginárias. (para uma análise precisa este de trabalho, Flamment (2003, p. 165-195). Sabe-se a sucessão de artigos que a obra suscitará após a divulgação dos seus principais resultados por Francês nos *Annales* de Gergonne. É particularmente significativo que estes artigos não tiveram desenvolvimentos imediatos nos escritos dos principais matemáticos da época, ainda que Legendre tivesse sido impressionado pelo trabalho de Argand. Schubring (2001, p. 128-129).

Cauchy esperará 1847 para vir explicitamente à uma representação geométrica das quantidades imaginárias, recordando "que na minha Análise algébrica publicada em 1821, tivesse-me satisfeito de fazer ver que pode-se tornar rigorosa a teoria das expressões e equações imaginárias, considerando estas expressões e estas equações como simbólicas" (Cauchy [1847], p. 175-176). De acordo com Bourbaki (1984, p. 203), há um desvio entre a definição de de caráter formal que dá Cauchy e a prática na medida em que em muitos de seus trabalhos há uma relação entre expressões imaginários e pontos do plano. Com efeito pode-se dificilmente imaginar os métodos dos cálculos dos resíduos sem uma visão geométrica subjacente dos números imaginários. Dahan [1997] analisou em detalhe este desvio e explica-o por uma tensão entre diferentes programas de investigação nos quais comprometeu-se Cauchy. Dahan Opõe o *programa fundacional* de Cauchy onde as quantidades imaginárias são definidas formalmente, e participa de uma construção e uma definição dos campos da análise, aos diferentes métodos e práticas que desenvolve na análise da variável complexa, onde distingue uma evolução nas formulações que se tornam cada vez mais geométricas através "de uma cadeia de traduções minúsculas". Sempre é que o caráter geométrico dos raciocínios é inegável e vai afirmando-se.

Gauss

Com a sua memória Theoria residuorum biquadraticorum, K. F. Gauss (1831[a]) desenvolve uma nova perspectiva de investigações para o aritmética e a álgebra. A fim de demonstrar em toda a sua generalidade a lei de reciprocidade biquadrática, realiza uma extensão do domínio da aritmética aos números que qualifica de complexos, uma nova terminologia que rapidamente será adoptada pela comunidade dos matemáticos, e associa ao qualquer número complexo um ponto do plano. Retorna na memória do seu trabalho sobre esta apresentação:

> "Em contrapartida o aritmética dos números complexos é susceptível do mais compreensível apreendida pelos sentidos (anschaulichsten Versinnlichung), e ainda que o autor na sua exposição observou esta vez um tratamento aritmético puro, no entanto para tornar assim esta compreensão mais viva, e para esta apreensão pelos sentidos fortemente recomendada (empfehlende Versinnlichung), deu também as indicações necessárias, as quais serão suficientes para o leitor que pensa por ele mesmo" (Gauss [1831b, p. 174, a nossa tradução)

Gauss não procura dar um estatuto ontológico aos números complexos por via desta apresentação sensível. Evocando o tratamento aritmético puro, Gauss sugere que a existência dos números complexos venha da álgebra pura. É de resto notável que utiliza o termo *Versinnlichung* que significa o ato de tornar sensível, antes que *Vorstellung* (termo que corresponde à representação). A necessidade de tal apresentação sensível é antes ligada à arte da invenção. Como indica-o,

> "o autor abordou há muitos anos esta parte importante da matemática com um ponto de vista diferente, de acordo com o qual um objecto podia atribué às grandezas imaginárias muito assim como aos negativo: mas tem faltado até agora um ocassion exprimir de maneira precisos este publicamente, ainda que o leitor atento reencontraria facilmente os vestígios no escrito de 1799 sobre as equações e a memória do Premio sobre as transformações das superfícies" (a nossa tradução) (Gauss [1831b, p. 175, a nossa tradução)

É claro que esta visão dos números complexos frequentemente guiou-o nas suas investigações, como testemunha deste fato, para além dos textos que cita na sua memória, a famosa carta à Bessel de 1811 Gauss (W. B. X, p. 367) onde explica a respeito da integral de uma função da variável $x=a+bi$, que é necessário associar à este número, um ponto do plano cujas coordenadas são tomadas partir de um eixo real e um eixo imaginário. Este ponto de vista acompanha assim os seus raciocínios em todos os domínios onde intervem a variável complexa. A concepção de Gauss é assim bem diferente da de Cauchy, não há tensão entre visão geométrica e carácter simbólico dos números complexos. Esta visão geométrica acompanha as suas investigações e esta mobilizada no processo das suas descobertas.

Divulgação e práticas ligadas à representação geométrica dos números complexos

Vale também interessante observar a impressionante sequência de artigos e de obras em língua alemão sobre uma concepção geométrica dos números complexos que segue este trabalho de Gauss. Matzca (1850) enumera nove publicações que estendem-se entre 1834 e 1847. Se estes trabalhos não trazem elementos essencialmente novos, permitiram, como observa Flament (2003, p. 272-273) uma divulgação rápida desta concepção.

A fecundidade desta abordagem dos números complexos ainda será confirmada pelos trabalhos de Riemann. Nos *Princípios gerais para uma teoria geral das funções de uma variável complexa* (Riemann (1851), considera a partir das primeiras páginas as funções complexas como uma relação entre dois pontos de dois planos complexos, e quase imediatamente (p.6) como funções do plano em ele mesmo. O trabalho proseggue em considerações geométricas: a derivada de uma função da variável complexa é concebida como uma transformação linear que conserva os ângulos, as representações das funções multiformes utiliza planos múltiplos ligados pelas ramificações. A obra termina sobre o problema da representação de uma superfície sobre outra com em conclusão uma referência aos dois trabalhos mais importantes de Gauss sobre este último assunto.

Riemann situa por conseguinte a sua investigação na continuidade da obra de Gauss. É também o caso da sua tese de habilitação onde Riemann observa:

> "... com excepção de algumas curtas indicações dadas por Sr. Gauss na sua segunda Memória sobre os resíduos biquadráticos, o *Gehlerte Anzeigen* de Goettinge e a sua Memória do Jubilé, e algumas investigações filosóficas de Herbart, não pude ajudar-me com nenhum trabalho anterior. A fonte de inspiração é ainda aqui a memória de Gauss de 1831 onde, em conclusão, evoca uma extensão do plano complexo à variedades de dimensões superior. Riemann (1854 p. 281.)

Outro aspecto que aparece nos anos que seguem é o estudo das propriedades das transformações geométricas planas através dos números complexos. Siebeck parece ser o primeiro que desenvolveu este tipo de estudo num artigo *Ueber die Graphische Darstellung imaginär Functionen* (Cartan-study, n. p. 364). Expõe as propriedades dos complexos e algumas funções elementares como as semelhanças através dos números complexos. O exemplo talvez mais significativo é o estudo de algumas transformações circulares (p. 243-244) onde reencontra os resultados encontrados por Möbius (1855) que cita explicitamente. Möbius tinha estudado estas transformações do ponto de vista da geometria sintética. Aqui a análise complexa apropria-se o conteúdo.

Estas transformações circulares, desempenham também um papel determinante na geometria projectiva (homografias), bem como sublinha-o F. Klein no Programa de Erlangen (1872, p. 18-21)a respeito do que ele chama *a geometria dos raios vectores recíprocos* (não que dava-se então à este tipo de transformação). Estas transformações desempenham também um papel na construção de modelos da geometria hyperbolique como Poincaré o ressaltou nas suas memórias sobre as funções Fuchsiannes (Gray-Walter (1997)).

Considerações sobre a representação geométricados números complexos

Ao ver as diferentes visões geométricas dos números complexos podemos observar que a relação entre diagrama e as teorias envolvendo os números complexos declina variações que mostra a riqueza da criação matemática. Da semelhança de estrura entre o segmentos orientados (vetores) e os números complexos, esta representação se enriquecem com o surgimento da teoria das funções das variáveis complexos. Fornece também os modelos da geometria não-euclidiana e permite apreender atraves das superficies de Riemann vários aspectos das funções multiformes.

Referências

Andersen K. (1999), "Wessel work on complex numbers and its place in History", in Caspar Wessel, (1999) *On the Analytical Representation of Direction*, Branner B. –Jesper Lützen (ed.), 1999.

Argand, J. R. (1806) *Essai sur une maniére de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques,* Paris.

Bourbaki, N. (1984) *Elements d'histoire des mathématique*, Masson, 1984.

Cartan E. et Study E. (1908), "les nombres complexes", Encyclopédie des Sciences Mathématiques, t. 1,vol. 1, fasc. 3. pp. 329-425.

Cauchy A. L., (1821) *Cours D'Analyse de L'École Royale Polytechnique, Analyse Algébrique*. In Oeuvres Complètes D'Augustin Cauchy Gauthier-Villars. Série 2, Volume 3. Paris, 1882.

Cauchy A. L. (1847) Mémoire sur les quantités géométriques ,. In *Oeuvres Complètes* D'Augustin Cauchy Gauthier-Villars. Série 2, Volume 14, pp. 175-202 Paris, 1882.

Dahan Dalmenico, Amy (1997) L'étoile « imaginaire » a-t-elle immuablement brillé ? Le nombre complexe et ses différentes interprétations dans l'oeuvre de Cauchy. In *Le nombre, une hydre à n visages,* Dominique Flament (ed.), Ed. De La Maison des sciences de l'Homme Paris.

Flament Dominique [2003] *Histoire des nombres complexes*, CNRS editions Paris 2003.

Gauss, C. F. [1831a] Theoria residuorum biquadraticorum , Werke II, p.93-148.

Gauss, C. F. (1831b) Selbstanzeige von Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio secunda , *Goettingen gelehrte Anzeigen*, 23 de abril de 1831, Werke II, p.169-178.

Gilain Christian [1997] « Le théorème fondamental de l'algèbre et la thérie géométrique des nombres complexes au XIXème siècle », in *Le nombre, une hydre à n visages*, Dominique Flament (ed.), Ed. De La Maison des sciences de l'Homme Paris.

Gray Jeremy J.- Walter Scott A. (1997), "Introduction to Poincaré's Three Supplements" in *Three Supplements on Fuchsian Functions by Henri Poincaré,* Jeremy J. Gray and Scott A.Walter ed., Berlin 1997, pp. 1–25.

Hamilton, W. R. (1837) Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary Essay on Algebra as the Science of Pure Time, Royal Irish Academy.

Hamilton W.R. (1853) *Lectures on Quaternions*, Dublin.

Heath (1908). Thirteen books of Euclid's Elements, Cambridge, University Press.

Matzca Wilhelm (1850), *Versuch einer Richtigen Lehre von der Realitaet der vorgeblichj imaginären Grössen der Algebra oder einer Grundlehre von der Ablenkung algebrischer Grössenbeziehungen*, Prag.

Möbius (1855) Die Theorie der Kreisverwandschaft in rein geometrischer Darstellung, Leipzig 1855, in Möbius *G.W.* B. II. Leipzig 1886, pp. 243-341.

Riemann B. (1851) Principes généraux pour une théorie générale des fonctions d'une variable complexe . In Bertrand Riemann, *Oeuvres mathématiques*, trad. L. Laugel Paris 1898 pp. 1-60.

Riemann B. (1854) Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie. In Bertrand Riemann, *Oeuvres mathématiques*, trad. L. Laugel Paris 1898, pp. 280-299.

Schubring, G. (2001) "Argand and the Early Work on Graphical Representation: New Sources and Interpretations. In *Around Caspar Wessel and the Geometric Representation of Complex Numbers*, *Proceedings of the Wessel Symposium at The Royal Danish Academy of Sciences and Letters*. Jesper Lutzen (ed.) Copenhagen,, pp. 125-146.

Saito Ken (2006). "A preliminary study in the critical assessment of diagrams in Greek mathematical works." *SCIAMVS* 781-144. (Osaka Prefecture University),

Saito Ken (2007). Les figures des Eléments dans les manuscrits et les éditions imprimées, Colloque « Traditions euclidiennes » 25-27 avril 2007, Maison de la Recherche, Clermont-Ferrand.

Saito Ken (2008). The Diagrams of Book IV of the Elements. In *Greek Manuscripts in Diagrams in Greek Mathematical Texts*, disponível http://www.hs.osakafu-u.ac.jp/~ken.saito/diagram/index.html

Siebeck P. (1858) Ueber die Graphische Darstellung imaginär Funktionen> In *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Berlin, pp. 221 – 253.

Warren (1828), J. *A Treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities*. Cambridge, 1828.

Wessel C. (1897), C. *Essai sur la Représentation Analytique de la Direction*. Copenhague e Paris, 1897.