CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO PARA O ENSINO MÉDIO

Bruno Vianna dos Santos

Colégio Pedro II do Rio de Janeiro – Campus Tijuca II e Secretaria Municipal de Educação de Duque de Caxias

vianna@impa.br

Fábio Luís de Brito

Colégio Pedro II do Rio de Janeiro – Campus Tijuca II e Colégio Franco-Brasileiro

fabio.brito@liceufranco.g12.br

Luiz Amorim Goulart

Colégio Pedro II do Rio de Janeiro – Campus Tijuca II e Colégio Naval

amorim@impa.br

A comunidade que reflete e trabalha com educação matemática, tem apontado diversas falhas no que diz respeito aos resultados necessários para a evolução tecnológica da sociedade. Em particular, sobre o Cálculo Diferencial e Integral, ausente de modo formal do ensino médio brasileiro, mas com resultados em momentos importantes desta etapa escolar, reclama atenção e adaptação curricular para contribuir no sentido da resolução de algumas falhas existentes. Seguem, de forma resumida, ideias provenientes de trabalhos de conclusão do Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT/SBM) e que continuam a serem pesquisadas e desenvolvidas pelos autores, a fim de que o Cálculo Diferencial e Integral possa cumprir o seu papel na sociedade que dele precisa para os desdobramentos que lhes são peculiares.

Palavras-chaves: Cálculo, Ensino Básico.

INTRODUÇÃO

Os altos índices de reprovação, de alunos que buscam as áreas tecnológicas, no curso de Cálculo Diferencial e Integral têm sido encarados como um alerta para a necessidade da modificação do modo como esta matéria é encarada e ensinada. Rezende (2003) aponta diversos dados que comprovam essas reprovações e estuda os motivos para o que ele chama de "fracasso no ensino de Cálculo".

Dentre diversos apontamentos sobre os resultados negativos em Cálculo observados por Rezende (2003), é possível destacar a afirmação de que estes não são exclusivos do Brasil. Também é possível destacar algumas peculiaridades do movimento *"Calculus Reform"* da década de 80, deflagrado por Peter Lax e que sugere, basicamente, o uso de tecnologias para o desenvolvimento do estudo do Cálculo; a ênfase sobre as interpretações numéricas, geométricas e analíticas dos teoremas e suas consequências; a preocupação em evidenciar a aplicabilidade do Cálculo; e a tentativa de baixar a exigência das atividades no que concerne à competência algébrica, suprindo de outras formas essas estruturas.

Pouco depois da década de 1980, surge a defesa inflamada de Ávila (1991) para que educadores do país busquem inserir o Cálculo no ensino básico:

> O Cálculo vem desempenhando um papel de grande relevância em todo o desenvolvimento científico-tecnológico. Portanto, descarta-lo no ensino é grave, porque deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual.
>
> Geraldo Ávila (1991)

Incentivados por essas colocações, pela notória importância que o Cálculo tem para compor o ferramental intelectual daqueles que contribuem para o desenvolvimento tecnológico do país, e aproveitando a oportunidade oferecida pelos professores Marcelo Viana e Victor Giraldo de pesquisar e desenvolver o ensino do Cálculo em fase escolar anterior ao da graduação, que escrevemos nossos trabalhos de conclusão do curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT/SBM), com o objetivo de ajudar a erguer a bandeira de trabalhar o Cálculo ainda no ensino médio e, assim, tentar contribuir para que essa tarefa seja, não apenas possível, mas considerada fundamental para a melhoria do ensino da matemática.

Seção do Trabalho

Rezende (2003) destaca as dificuldades epistemológicas no que diz respeito ao ensino-aprendizagem de Cálculo na graduação. Suas colocações representam valiosíssimas orientações para uma educação que deseje ter o Cálculo em seu currículo. Ele destaca “macro-espaços” de dualidade em que repousariam as principais dificuldades no que tange ao ensino de Cálculo. Os autores acreditam que um ensino de Cálculo preocupado em desenvolver saberes e aptidões deva considerar seriamente essas dificuldades, a fim de não cair no lugar comum da falência apontada. Abaixo vemos o diagrama que ele mesmo constrói em seu estudo:

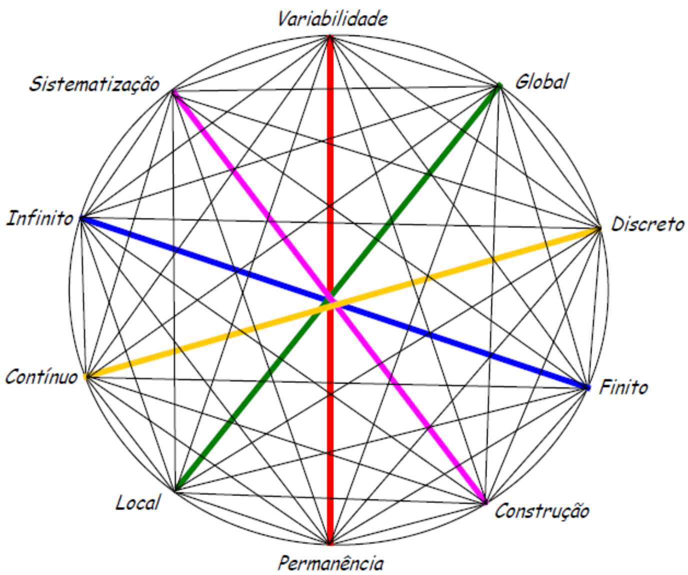


Figura 1: Macro-Espaços de Dualidade, Rezende (2003).

O ensino de Cálculo começará a apresentar melhores resultados quando a preocupação em desenvolver suas noções estiver presente no ensino básico, uma vez que diversos resultados desenvolvidos e estudados no próprio Cálculo estão presentes em afirmações nesse segmento de ensino, mas, falando metaforicamente, ocultados por um véu místico em que só os eleitos podem deter a compreensão de sua origem. Até mesmo a Física do ensino básico procurou utilizar-se desse “véu” e estruturar seu conteúdo de modo a fugir de afirmações que façam referência direta ao Cálculo. E ao invés da definição clássica de aceleração como uma diferencial da velocidade e a velocidade como uma diferencial do espaço percorrido, estuda-se cada um separadamente e distinguem-se as grandezas médias das instantâneas, as uniformes das variadas. Isso certamente tem contribuído para que o Cálculo, surgido pela primeira vez no ensino superior, não seja compreendido no âmbito de suas aplicações e das razões históricas pelas quais foi desenvolvido.

Há de se levar em conta que ideias abstratas e procedimentos carregados de rigor em matemática, quando avaliados importantes no âmbito de ferramentas para conteúdos posteriores, são trabalhos em nível de noção em séries iniciais para, posteriormente, receberem rigor e demonstração. Sendo assim, pode-se afirmar que são pertinentes, Ávila (1991) e Rezende (2003), quando defendem o estudo de noções de Cálculo no ensino básico.

> De fato, a ausência das ideias e problemas essenciais do Cálculo no ensino básico de matemática, além de ser um contrassenso do ponto de vista da evolução histórica do conhecimento matemático, é, sem dúvida, a principal fonte dos obstáculos epistemológicos que surgem no ensino superior de Cálculo. Assim, fazer emergir o conhecimento do Cálculo do "esconderijo forçado" a que este está submetido no ensino básico é, sem dúvida, o primeiro grande passo para resolvermos efetivamente os problemas de aprendizagem no ensino superior de Cálculo.
>
> Rezende (2003)

Por serem profissionais do ensino básico e conhecerem as dificuldades e resistências existentes quando se defende uma mudança de currículo, os autores entendem que o momento histórico é propício, uma vez que em 2008 foi apresentado o *"Klein Project for the 21st century"* para celebrar os 100 anos da primeira publicação dos famosos textos de Felix Klein para professores do ensino secundário[1]. Assim, se faz defender uma mudança de currículo, mas que essa mudança ocorra de modo gradativo, onde a primeira etapa consista de tirar o Cálculo de seu "esconderijo forçado" citado por Rezende (2003), e verbalizar os conceitos e ideias conforme sua relação com o Cálculo. Alicerçados em todas essas colocações, são apresentadas algumas sugestões que foram defendidas no trabalho de conclusão de curso:

As dízimas periódicas

No ensino médio, o aluno já terá sido exposto à existência da representação decimal periódica de certos números racionais. Para o currículo de muitos colégios brasileiros, as progressões geométricas aparecem no início do ensino médio. Tem-se aí uma boa oportunidade de desenvolver noções de Cálculo. Em particular, as ideias em torno de vizinhança, ponto de acumulação, convergência, divergência e limite de sequências. Reservando alguns tempos de aula a mais do que o planejado inicialmente, os autores sugerem atividades que permitam aos alunos o desenvolvimento de noções das ideias supracitadas, que para economia de tempo podem ser aplicadas como atividades extraclasses que, posteriormente, devem ser discutidas e concluídas em aula. Amorim (2013) propõe tais abordagens logo após as atividades normais sobre a soma finita de termos de uma progressão geométrica. Em seu trabalho, sugere atividades que procuram aproveitar os conhecimentos já desenvolvidos pelo aluno para construir saberes sobre progressões geométricas infinitas e convergentes, procurando induzir o aluno a refletir sobre os detalhes que estão presentes nos cálculos de limites dessas sequências, testar suas suposições, verificar a opinião dos colegas de classe e construir fichamento das principais conclusões, conforme se vê a seguir.

[1] atual ensino básico.

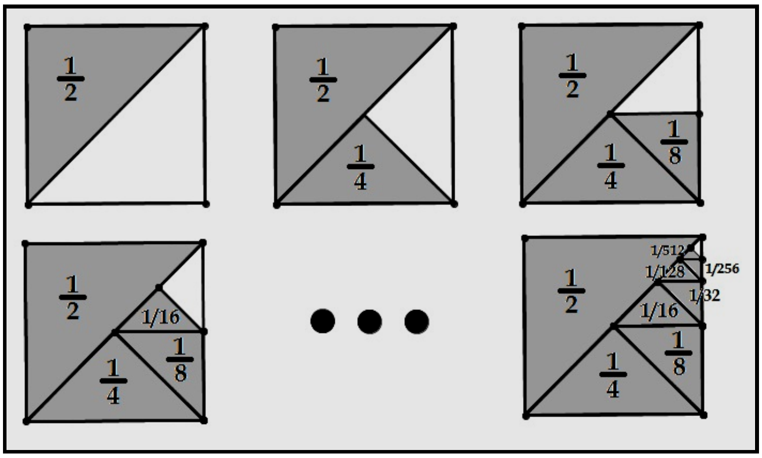


Figura 2: Soma infinita dos termos de uma progressão geométrica convergente, Amorim (2013).

C) Com a ajuda de uma calculadora, preencha a tabela abaixo:

	S_n	$d_n = 1 - S_n$
$n = 1$	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{1}{2} = 0,5$
$n = 2$	$\frac{3}{4} = 0,75$	$\frac{1}{4} = 0,25$
$n = 3$	$\frac{7}{8} = 0,875$	$\frac{1}{8} = 0,125$
$n = 4$	$\frac{15}{16} = 0,9375$	$\frac{1}{16} = 0,0625$
$n = 5$	$\frac{31}{32} = 0,96875$	$\frac{1}{32} = 0,03125$

Figura 3: Tabela de somas parciais dos termos de uma progressão geométrica convergente e sua diferença para o limite da soma infinita desta mesma sequência, Amorim (2013).

K) Com o que foi discutido até aqui, qual sua opinião sobre a afirmação de que o limite das somas parciais é 1? O que os seus colegas acham?
Está correto.

L) Após esse debate com seus colegas e com o professor, bem como as figuras que mostram as somas parciais das áreas, você concorda em escrever que $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1$?
Sim.

Figura 4: Incentivo ao posicionamento e debate de conclusões na investigação matemática, Amorim (2013).

Através das orientações dadas pelo questionário, as discussões realizadas com os colegas e com o professor, e as figuras, vimos que os valores de S_n podem estar tão próximos de 1 quanto se queira, bastando escolher um valor adequado de 'n'. Toda a nossa análise revela que o número __1__ ***é uma espécie de "imã" dos termos de 'S_n', acumulando em torno de si e cada vez mais perto de si todos os valores fornecidos por qualquer soma parcial.*** Matematicamente, essa observação, é traduzida com qualquer uma das afirmações abaixo, que são modos diferentes de expressar o mesmo fato:

- A sequência S_n converge para __1__.
- O limite de S_n é __1__, quando n tende a infinito.
- $\lim_{n\to\infty} S_n =$ __1__.
- A soma de todos os infinitos termos de $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots\right)$ é __1__.
- $S_\infty =$ __1__

Figura 5: Fichamento das conclusões mais importantes até esse momento da atividade e inserção da simbologia própria do estudo de limite, Amorim (2013).

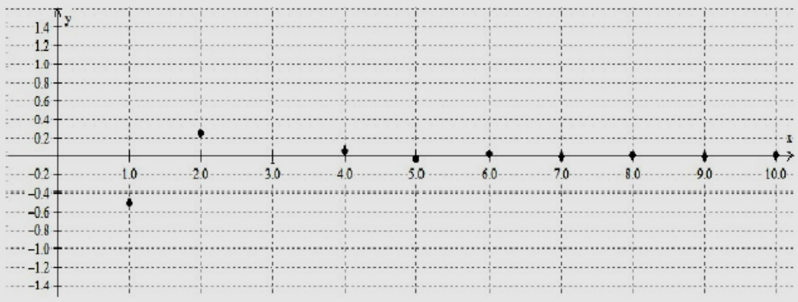
Através de procedimentos semelhantes e variando um pouco a tecnologia utilizada, ora com calculadora, ora com planilha eletrônica, o autor conduz o aluno a questionar as próprias conclusões e refletir sobre sequências que fugiriam de um padrão equivocado que as atividades anteriores poderiam gerar. Assim, o aluno tem a possibilidade de construir noções mais sólidas e distantes de contradições. A seguir, uma parte destas atividades:

i) $-2, -4, -8, -16, -32, \cdots$ preserva a característica de diminuir os termos gradativamente.

i.a) Os termos diminuem, mas eles se aproximam de zero?
Não, ao contrário, eles se afastam cada vez mais

Figura 6: Sequências com características um pouco diferentes I, Amorim (2013).

ii) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \cdots$ tem seus termos oscilando entre valores positivos e negativos. Contudo observe o gráfico a seguir com diversos valores dessa sequência:



OBS: Esta sequência ultrapassa e regressa, periodicamente, seu limite. Pretende-se com este exemplo mostrar que essa característica existe para algumas sequências e que é possível haver, também nestes casos, um limite. Acreditamos que esse fato seja ainda mais surpreendente para a sequência das somas parciais que também analisaremos.

Figura 7: Sequências com características um pouco diferentes II, Amorim (2013).

Comparando a Série Harmônica com as Somas Parciais da Sequência $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots$

n	S_n	$<, =$ *ou* $>$	Somas Parciais de $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots\right)$
1	1	$=$	1
2	$1 + \frac{1}{2}$	$=$	$1 + \frac{1}{2}$
4	2,08333...	$>$	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
8	2,7178...	$>$	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
16	3,3807...	$>$	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

Figura 8: Sequências com características um pouco diferentes III, Amorim (2013).

Após essas atividades o autor apresenta um roteiro para a conclusão da fórmula conhecida de soma infinita dos termos de uma progressão geométrica convergente e aprofunda um pouco mais as noções sobre determinação de limites, fertilizando adequadamente um solo que receberá de modo mais natural a futura axiomática sobre o assunto no ensino superior. Outro aspecto que o autor faz questão de trabalhar ao sugerir tais atividades é o modo como a humanidade pode se utilizar desses conceitos para resolver suas questões. Quanto a isso, as atividades apresentam noções de fractais e uma aplicação na economia. Tudo isso visando o descobrimento de significado ao que se está aprendendo por parte do aluno, permitindo um olhar mais natural à necessidade de se estudar tais conteúdos.

Maiores detalhes sobre as atividades citadas podem ser obtidas na versão completa do trabalho de Amorim (2013) sob o título *"Progressões Geométricas e o que Vai para Baixo do Tapete"*.

O Infinito

No ensino básico, a passagem do discreto para o contínuo é abordada de modo muito superficial e qualquer tentativa de alavancar uma discussão mais profunda que envolva o tema, esbarra no conhecimento intuitivo e confuso que os alunos possuem dos conceitos de infinito e infinitésimo. Para os presentes autores, ficou claro em suas pesquisas que esses conceitos mal internalizados comprometem diretamente a construção do próprio conceito de limite. Pesquisas realizadas com os alunos do Colégio Pedro II (Campus Tijuca II) comprovam esse fato. A figura a seguir é um pequeno recorte do questionário sobre infinito respondido pelos alunos do colégio.

"4.3) Qual conjunto possui maior número de elementos N ou P? Justifique".

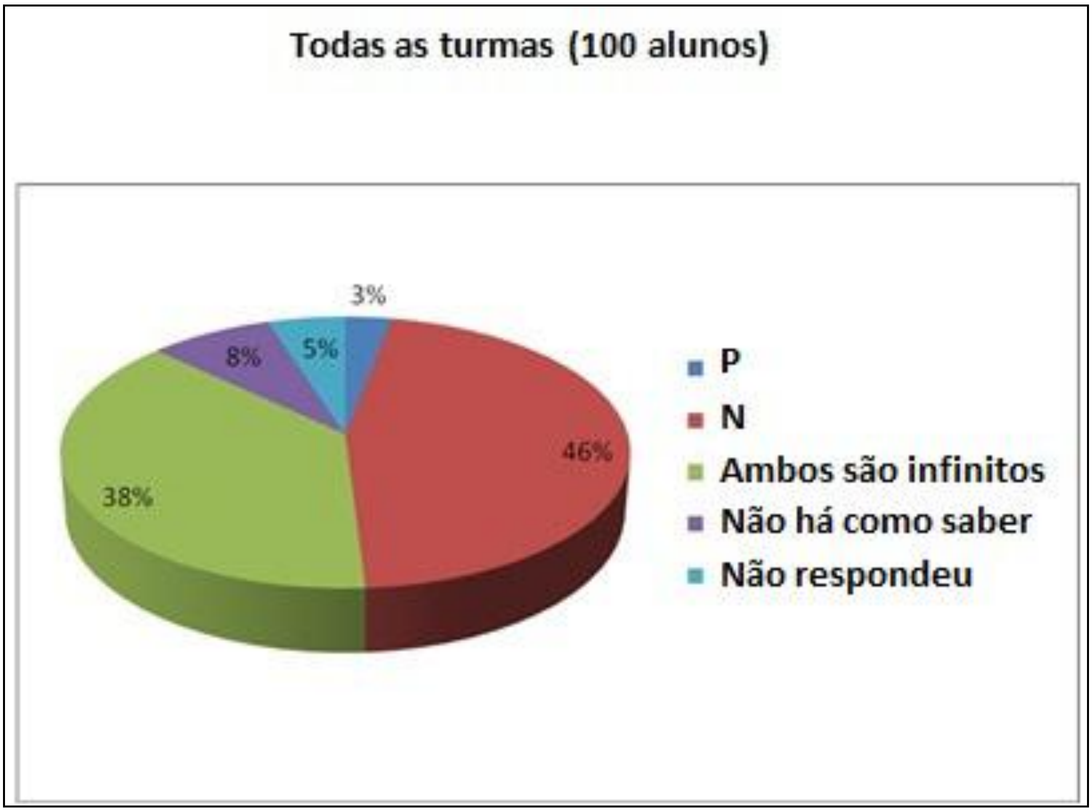


Figura 9: Gráfico com a resposta dos alunos do Colégio Pedro II a pergunta 4.3, Vianna (2013).

"4.8) Qual conjunto possui maior número de elementos Z ou N"?

Figura 9: Gráfico com a resposta dos alunos do Colégio Pedro II a pergunta 4.8, Vianna (2013).

O questionário completo pode ser encontrado em Vianna (2013) "Cálculo no Ensino Médio: Despertando Ideias sobre o Infinito".

A análise do comportamento de funções

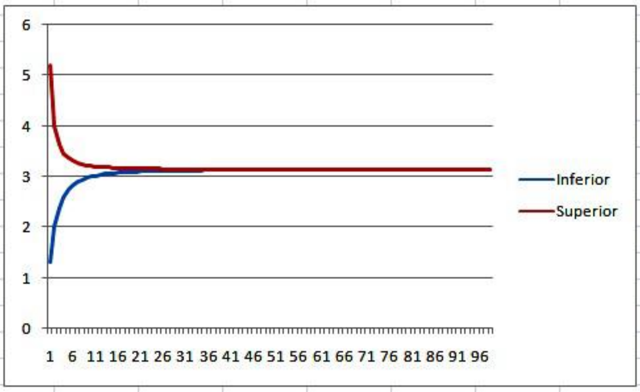
Com as noções de limite já estabelecidas, pelas atividades anteriores, ganha-se a possibilidade de tratar de assíntotas horizontais e verticais de certas funções, bem como a avaliação de intervalos de crescimento ou decrescimento, noções de derivadas e máximos e mínimos relativos, limites laterais e no infinito, etc... Um pouco disso pode ser encontrado em Vianna (2013) "Cálculo no Ensino Médio: Despertando Ideias sobre o Infinito", cuja sugestão de abordagem para o ensino médio é meramente visual, valendo-se de plotadores como o software Geogebra. Com isso, aposta no "ensino em espiral", para poder definir alguns conceitos e propriedades que só serão formalizados e demonstrados no ensino superior. Porém, depois de apresentados, podem ser utilizados em diversas situações-problema tanto no campo da Física quanto na própria Matemática.

Determinação de áreas e volumes

No ensino médio, o estudo da geometria espacial utiliza, do modo como hoje é tratada, o método da exaustão de Arquimedes. Com as sugestões que os autores oferecem, ganhamos aqui uma economia de tempo, uma vez que o entendimento do método da exaustão se dará de modo mais natural se as atividades anteriores sobre o desenvolvimento das noções de limite já tiverem sido ministradas. Temos ainda aqui, a possibilidade de posicionar historicamente o conteúdo e revisar a área do círculo numa introdução ao método da exaustão para, em seguida, deduzir o volume da esfera e a área de sua superfície.

Para isso encontra-se também em Vianna (2013) "Cálculo no Ensino Médio: Despertando Ideias sobre o Infinito", uma atividade que se utiliza da dedução da área do círculo através de recursos tecnológicos como os softwares Geogebra e Excel, para indagar os alunos questões a respeito de limites inferiores e superiores, convergência e método da exaustão. A seguir é apresentado parte desta atividade, onde é pedido aos alunos que preencham uma tabela no Excel com os valores das áreas, aferidas no Geogebra[2], dos polígonos inscritos ("Inferior") e circunscritos ("Superior") num círculo de raio 1.

n	Inferior	Superior
3	1,299038106	5,196152423
4	2	4
5	2,377641291	3,63271264
6	2,598076211	3,464101615
7	2,736410189	3,371022332
8	2,828427125	3,313708499
9	2,892544244	3,275732108
10	2,938926261	3,249196962
11	2,973524496	3,229891422
12	3	3,215390309
13	3,020700618	3,204212219
14	3,037186174	3,195408641
15	3,050524823	3,188348425
16	3,061467459	3,182597878
17	3,070554163	3,177850751
18	3,07818129	3,173885653
19	3,084644957	3,170539238
20	3,090169944	3,167688806
21	3,094929331	3,165240713
22	3,099058125	3,163122468
23	3,102662868	3,161277236
24	3,105828541	3,159659942
25	3,10862359	3,158234461
26	3,111103636	3,156971564



2 http://www.geogebratube.org/student/m13004

Figura 10: Exemplo de preenchimento de planilha para comparação das áreas de polígonos regulares incritos e circunscritos a um círculo de raio 1, Vianna (2013).

Vale destacar que essa atividade foi pautada no diagrama a seguir, retirado de Rezende (2003).

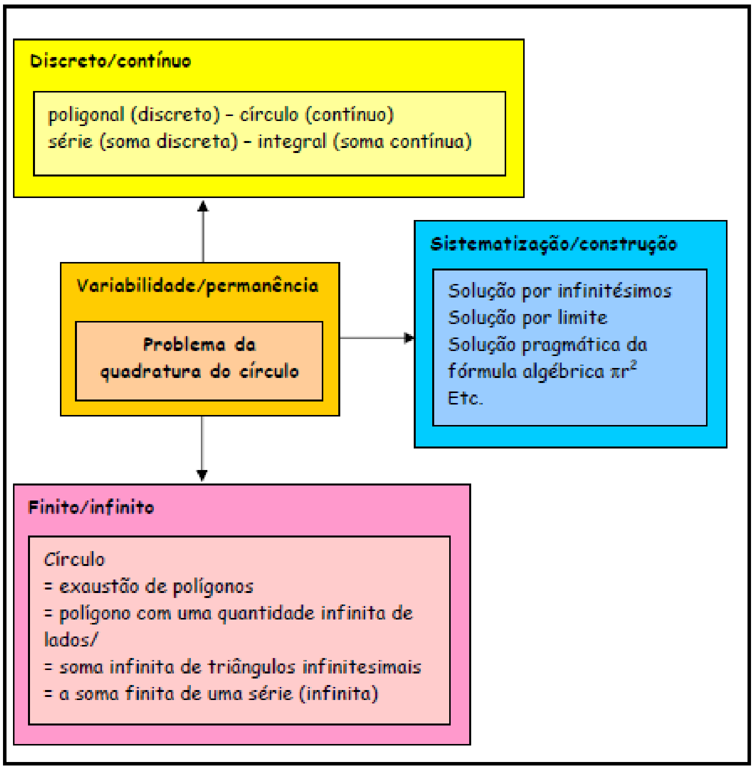


Figura 11: Descrição resumida de alguns dos "Macro-espaços" de dualidade, Rezende (2003).

É oportuno aproveitar, em se tratando de áreas e volumes, desenvolver noções do teorema de Papus-Gudin para determinação de volumes e de centros de gravidades, e para determinação da área sob o gráfico de uma função não negativa *f* definida num intervalo real [a ; b]. Neste último, o histórico problema para calcular a área da região compreendida entre a faixa de parábola $f(x)=x^2$ e o eixo horizontal no intervalo [0 ; 1] foi proposto como sugestão de atividade para alunos do ensino médio, usando recursos como planilhas eletrônicas e geometria dinâmica (no caso desta atividade, foram usados Excel e Geogebra, respectivamente).

Tabela 1: Resultados obtidos na atividade.

	28 faixas	340 faixas	1 000 faixas	3 456 faixas
$Si=$	0,31569	0,33186	0,33283	0,33319
$Ss=$	0,35140	0,33481	0,33383	0,33348

Os alunos observam uma convergência para 0,333... conforme o número de subdivisões do intervalo (na atividade, denominadas de "faixas") aumenta.
Os recursos computacionais aqui são ferramentas auxiliares que conduzem os alunos a possibilidade de resultados, mas ainda assim, aproximados. Para validar a resposta, outra ferramenta fundamental entra em ação: a Álgebra. E do resultado obtido, um método para calcular a área sob o gráfico de uma curva não negativa num intervalo dado. A simbologia do cálculo da Integral Definida para funções polinomiais é perfeitamente acessível, e porque não dizer imprescindível, ao aluno do ensino médio.

Com a Integral em mãos, o ganho de qualidade e de tempo na administração de conteúdos que aproveitam essa ferramenta para justificar seus resultados, como cinemática e determinação de áreas e volumes, por exemplo, é enorme. A atividade completa pode ser vista em Brito (2013).

Considerações Finais

O resultado almejado que as pesquisas para as conclusões dos mestrados dos autores ainda não está finalizado, devido às normas e tempo de execução do próprio programa de mestrado profissional e não acadêmico. O objetivo inicial era de poder criar um campo, baseado na Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud, sobre a inserção do cálculo no ensino básico, levando em consideração o caráter não acadêmico (sem objetivar as demonstrações e fugir da axiomatização da disciplina neste ciclo escolar), o que possibilitaria que abríssemos mão da ordem usual: ***Apresentação dos Reais* -** 8º e 9º anos do Ensino Fundamental → ***Estudo das funções*** -1ª série do Ensino Médio – ***Geometria Analítica* -** 3º ano do Ensino Médio → ***Limites*** – Ensino Superior → ***Derivadas*** - Ensino Superior → ***Integral*** - Ensino Superior; e partíssemos para uma abordagem ***histórico-construtivista***, priorizando ordem ***<u>Histórica</u>*** de construção desses conceitos, elucidando que a maioria desses conceitos já está presente no Ensino de Matemática e Física de quase todo o ensino básico. O referencial teórico seria pautado principalmente nos mapas apresentados em Rezende (2003) e na ideia de currículo em rede.

Sabiamente nossos orientadores vislumbraram a impossibilidade de tempo para concluirmos essa odisseia, e foi decidido que a concentração estaria na ***elaboração de atividades*** que aprofundassem e/ou abordassem esses conceitos. Vale salientar que essa equipe de trabalho, além dos orientadores já citados, é composta de cinco professores do ensino básico e que o trabalho estruturou-se conforme apresentado abaixo:

1) Prof. Bruno Vianna dos Santos (Conceito de Infinito com abordagem de Limites laterais e no infinito)
2) Prof. Luiz Amorim Goulart (Conceito de Limite de sequências)
3) Prof. Danilo do Nascimento da Silva (Conceito de Derivada)
4) Prof. Fábio Luís de Brito (Conceito de Integral)
5) Prof. Orlando Silva Junior (Construção dos Reais)

As dissertações dos professores Danilo e Orlando ainda não foram submetidas à banca, e com isso, preteriu-se neste artigo abordar temas já concluídos pelas defesas. Assim, é uma pretensão ampliar as discussões inseridas aqui com as dissertações que ainda serão defendidas.

É esperado que professores que tenham contato com este artigo e sintam-se impelidos a contribuir com essa causa venha a utilizar as atividades aqui descritas em suas aulas, ou mesmo fazer uma releitura das mesmas, adaptando-as para sua realidade e comunicando aos presentes autores suas experiências e seus resultados. De fato, o que está aqui escrito é parte de um trabalho em construção, que oferece ideias que, pela compreensão de algumas das dificuldades aqui narradas, dista de sua conclusão.

Referências

AMORIM, L. "*Cálculo no Ensino Médio: Progressões Geométricas e o Que Vai Para Baixo do Tapete*". PROFMAT/SBM, 2013.

ÁVILA, G. *O Ensino da Matemática no 2º grau*. Revista do Professor de Matemática (RPM18). Sociedade Brasileira de Matemática. São Paulo, 1991.

BRITO, F. *"Cálculo no Ensino Médio: Área Sob o Gráfico de uma Curva"*. PROFMAT/SBM, 2013.

PCN+, *Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*. Ciência da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, 2002.

REZENDE, W. M. *O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica*. Tese de Doutorado. São Paulo: FE-USP, 2003.

VIANNA, B. *"Cálculo no Ensino Médio: Despertando Ideias Sobre o Infinito"*. PROFMAT/SBM, 2013.