ELEMENTOS TEÓRICOS E INDICAÇÕES DE ABORDAGENS DE ENSINO PARA CONCEITOS DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Marcio Vieira de Almeida, Sonia Barbosa Camargo Igliori

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

marcioalmeidasp@gmail.com, sigliori@pucsp.br

Neste artigo são apresentados elementos teóricos, que fundamentam a utilização dos computadores na aprendizagem de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, e indicações de abordagens de ensino para os conceitos de limite, continuidade, derivada, integral definida e equações diferenciais. Tais elementos teóricos e abordagens foram desenvolvidas por David Tall, Professor Emérito de Pensamento Matemático da Universidade de Warwick, e seus associados. O que se apresenta neste artigo é resultante de uma pesquisa conduzida no âmbito do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Trata-se da elaboração de um panorama sobre alguns artigos de Tall com vistas a realizar sínteses, efetuar análises e evidenciar dados importantes sobre o ensino e a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral na perspectiva do pesquisador inglês. Neste artigo são descritos os objetivos, a problemática, os documentos submetidos à análise e a forma com que se processou a coleta de dados. Além disso, são exibidos elementos teóricos e indicações para abordagens de ensino dos conceitos do Cálculo. O estudo que se apresenta, neste artigo, pode contribuir com professores e pesquisadores, ou seja, com interessados em geral pelo campo da Educação Matemática Superior, mais especificamente pelo ensino e aprendizagem do Cálculo. Isso porque os elementos teóricos de Tall e colaboradores são frutíferos tanto para a prática docente quanto para a pesquisa nessa área.
Palavras-chaves: Tall; Ensino e Aprendizagem do Cálculo, Utilização de computadores.

INTRODUÇÃO

Nesta primeira seção são apresentados detalhes, como os objetivos, a problemática, os documentos considerados e a forma como eles foram coletados e submetidos à análise, do estudo (ALMEIDA, 2013). Esse estudo possibilitou a apresentação dos elementos teóricos, que fundamentam a utilização dos computadores na aprendizagem de conceitos do Cálculo, e das indicações de abordagens de ensino para os seguintes conceitos do Cálculo Diferencial e Integral: limite, continuidade, derivada, integral definida e equações diferenciais.

Trata-se de um estudo (ALMEIDA, 2013) de natureza teórica, com caráter bibliográfico, inserido na modalidade panorama, cujos procedimentos teórico-metodológicos pautaram-se na Análise de Conteúdo, segundo Bardin (1979). A proposta do referido estudo foi à construção de um panorama de artigos de autoria, ou com a colaboração, de Tall, visando os seguintes objetivos: a busca de compreensão das dificuldades de aprendizagem de conceitos da Matemática Avançada, mais especificamente os conceitos do Cálculo, e contribuir com a organização da área de pesquisa.

A problemática da referida pesquisa foi pautada nas dificuldades de aprendizagem relacionadas aos conceitos de números reais, infinito, limite, derivada e integral. E a outra componente da problemática são motivações e justificativas, expostas por Downs e Mamona–Downs (2008), da necessidade de produzir sínteses dos resultados obtidos no campo da Educação Matemática, com vistas à consolidação da nossa área e para a elaboração de práticas de ensino.

Como já anunciado anteriormente, segundo processo de coleta de dados necessário, a pesquisa conduzida (ALMEIDA, 2013) caracterizou-se como um estudo documental. Segundo Fiorentini e Lorenzato (2009) esse tipo de pesquisa realiza-se sobre qualquer tipo de documentação escrita. A coleta de informações é feita por meio de fichamentos das leituras que visam organizar de maneira sistemática os registros relativos a informações obtidas. Os documentos considerados nessa pesquisa foram artigos de autoria, ou com a colaboração, de David Tall. A escolha desse tipo de documentos deu–se em virtude dos argumentos de Bursztyn, Drummond e Nascimento (2010), segundo os quais pesquisadores de todo o mundo podem, por meio dos artigos, "divulgar os resultados de suas pesquisas, os métodos que usam, os conceitos que adotam ou propõem, as teorias que os orientam" (BURSZTYN, DRUMMOND; NASCIMENTO, 2010, p. 17).

Em virtude do amplo volume de trabalho desenvolvido por David Tall e seus associados, o universo dos artigos considerados foi restringido. Em vista dos objetivos almejados, foi considerada uma seção, na qual foi abordado um tópico central para o Cálculo, a saber, o conceito de limite, assumindo o que defende Cornu:

> O conceito matemático de limite é uma noção particularmente difícil, característico do tipo de raciocínio necessário na Matemática Avançada. Ele detém uma posição central que permeia toda análise matemática – como um fundamento da teoria das aproximações, da continuidade, e do cálculo diferencial e integral.
>
> Bernard Cornu (1991)

Em virtude do ponto de vista exposto, foram escolhidos os artigos da seção *Limits, Infinity & Infinitesimals*[1], do sítio acadêmico do pesquisador. Segundo o prefácio existente no sítio, Tall chamou a atenção de que os estudos, que resultaram nos artigos, indicaram a existência de distinções entre as teorias matemáticas e as crenças cognitivas dos sujeitos. Uma delas foi relacionada ao fato de que nosso cérebro associa uma ideia de movimento à noção de limite. Em consequência, a imagem mental foca apenas em aspectos dinâmicos dessa noção.

Outro aspecto destacado foi que a noção de limite pode ser concebida como um processo e posteriormente como um conceito. Logo, ele é passível de uma análise em termos da noção de proceitos[2]. Além disso, Tall descreveu um conflito cognitivo relativo ao fato de muitas vezes, o sujeito conceber o conceito de limite como um processo de aproximar-se a um valor limite, sem nunca alcançá-lo. Essa concepção entra em conflito com a definição formal desse conceito.

O conceito de limite zero de uma sequência, ou de uma função, revelou ao pesquisador o surgimento no sujeito da ideia de número arbitrariamente pequeno, o que ele nomeou como um infinitesimal cognitivo.

Por fim, nos artigos mais recentes, pertencentes à referida seção, o objetivo do pesquisador foi propor um modelo com vistas a explicar como ocorre o desenvolvimento formal dos conceitos da Matemática, por parte do sujeito.

Em Almeida (2013), o estudo dos artigos considerados foi conduzido do seguinte modo: inicialmente, foi conduzido um estudo minucioso do *corpus* documental[3] e foram eleitas as unidades de análise. Por meio desse estudo, foram criadas dois tipos de categorias que nortearam a construção do panorama pretendido.

---

[1] Endereço eletrônico da seção: <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/limits-infinity.html>. Acesso em: 22 mai. 2013.
[2] Tradução do termo original *procepts* utilizado por Tall.
[3] Segundo Bardin, o *corpus* documental é "o conjunto de documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos" (BARDIN, 1979, p. 96).

O primeiro conjunto teve por objetivo evidenciar as proposições teorias desenvolvidas, pelo próprio pesquisador ou com a sua colaboração, que surgiram no *corpus* documental. Em resultado disso foram criadas seis categorias: na categoria “concepções infinitesimais”, foram destacadas situações em que ideias da Análise Não-Standard[4] foram utilizadas para o desenvolvimento de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral; na categoria “conflitos”, foram exibidas maneiras pelas quais o pesquisador utilizou-se de situações conflituosas ao sujeito, com vistas a propiciar ideias adequadas ao desenvolvimento de um conceito da Matemática; na categoria “conceito imagem e o conceito definição”, estão situações em que Tall utilizou esse elemento teórico nas abordagens de dificuldades relacionadas à aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral; na categoria “proceito”, estão situações em que os autores se utilizaram dessa noção; na categoria “utilização dos computadores” foram ressaltados elementos teóricos, como os organizadores genéricos e a noção de raízes cognitivas, que fundamentam a utilização dos computadores no ensino de tópicos avançados da Matemática; na categoria “desenvolvimento da Matemática Formal”, foram destacados construtos teóricos que buscaram analisar a forma como o sujeito desenvolve as teorias matemáticas formais e modelos, propostos por Tall e seus associados, para analisar desenvolvimento da matemática formal por parte do sujeito.

No segundo conjunto de categorias foram destacados os tópicos do Cálculo Diferencial e Integral, que emergiram nos artigos do *corpus* documental. Tais tópicos totalizaram oitos categorias, apresentadas no Quadro 1.

Quadro 1 – Categorização dos artigos segundo os tópicos relacionados ao cálculo que surgiram no *corpus* documental

Categoria		**Quantidade de artigos que abordaram esse tópico**
1	Números reais	3
2	Infinito	5
3	Limites	8
5	Sequências e séries	2
5	Continuidade	4
6	Derivada	3
7	Integral	4
8	Equações Diferenciais	2

Fonte: Elaboração própria.

Em virtude dos objetivos do Colóquio, nas seções subsequentes deste artigo tem o objetivo de apresentar os elementos teóricos desenvolvidos por Tall, com o objetivo de fundamentar a utilização dos computadores, coletados por meio da categoria “utilização dos computadores”, e cinco indicações de abordagens de ensino desenvolvidas pelo pesquisador e seus colaboradores, que emergiram da pesquisa de Almeida (2013).

[4] Ramo da Matemática desenvolvido na década de 60, por Abraham Robinson, que “procura recuperar a noção de infinitésimo que, com o auxílio dos métodos da lógica matemática, em particular da teoria dos módulos, foi estabelecida de forma rigorosa” (FELIZARDO, 2005, p. 6).

ELEMENTOS TEÓRICOS QUE AUXILIAM A FUNDAMENTAR A UTILIZAÇÃO DOS COMPUTADORES

Nesta seção foram exibidos elementos teóricos, que emergiram da pesquisa de Almeida (2013), desenvolvidos por David Tall e seus colaboradores. Esses elementos auxiliam na fundamentação da utilização dos computadores no ensino de conceitos da Matemática.

David Tall foi um dos precursores que vislumbrou a possibilidade de utilização das novas tecnologias no ensino da Matemática Avançada. Essa temática foi abordada em sua tese de doutoramento, em Educação Matemática, intitulada *Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus Using Interactive Computer Graphics* (TALL, 1986).

Além disso, Tall e Dubinsky afirmam que o computador e determinados *softwares* podem ser concebidos como:

> [...] uma ferramenta – uma ferramenta poderosa – mas qualquer ferramenta pode somente ser utilizada na sua capacidade máxima por aqueles que vão utilizá-las. A situação é similar ao uso de uma calculadora simples: elas não ensinam a criança como somar (ou dividir), mas elas são ferramentas úteis para somar e dividir quando se conhece a aritmética.
>
> David Tall (1991)

Segundo o pesquisador "os computadores podem prover uma fonte rica e interativa de imagens" (TALL, 1993, p. 1, tradução nossa). Contudo, por se tratarem de máquinas finitas, muitas vezes não é possível representar adequadamente a complexidade da Matemática. Visando contornar tais dificuldades, o pesquisador propôs uma maneira, na qual *softwares*, que plotam gráficos, possam ser utilizados para propiciar imagens que auxiliarão no desenvolvimento de tópicos do Cálculo e da Análise. Um exemplo abordado no artigo (TALL, 1993) foi o esboço do gráfico da função real *f* definida pelas sentenças:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1 - x & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

Em outro artigo (TALL, 2000), o pesquisador aprofundou suas reflexões com respeito à maneira que determinados ambientes computacionais podem ser utilizados para o desenvolvimento cognitivo dos sujeitos. Nesse sentido, os computadores são poderosos, pois

> [...] podem executar quaisquer algoritmos de forma rápida e eficiente, além de exibir o resultado final com uma gama de diferentes representações. Por exemplo, os resultados podem ser representados visualmente e manipulados fisicamente. Utilizando um *mouse* é possível ao estudante construir relações corporificadas que fazem parte de uma estrutura conceitual mais rica e ampla.
>
> David Tall (2000)

Os *softwares*, que proveem um retorno imediato às alterações realizadas pelo usuário, podem ser denominados como organizadores genéricos, cuja definição é:

> [...] um ambiente (ou micromundo[5]) que permite ao aprendiz manipular exemplos e (se possível) contraexemplos de um conceito matemático específico ou de um sistema de conceitos relacionados.
>
> David Tall (2000)

[5] Esse termo é utilizado pelo pesquisador no sentido concebido por Papert , um micromundo é como "um mundo autossuficientes no qual certas questões são relevantes e outras não" (PAPERT, 1980, p. 117 apud TALL, 1986, tradução nossa).

Para construção de um organizador genérico é necessária a seleção de uma ideia importante e essencial, que será o foco da atenção do estudante. Essa ideia não é necessariamente fundamental para a teoria matemática, porém, ela auxilia o sujeito a desenvolver intuições apropriadas ao desenvolvimento teórico. Segundo essas características, Tall formulou a noção de raízes cognitivas como

> [...] uma unidade cognitiva que é (potencialmente) significativa ao estudante naquele momento, no entanto deve conter sementes de uma expansão cognitiva para definições formais e desenvolvimento teórico futuro.
>
> David Tall (2000)

Dois exemplos de raízes cognitivas desenvolvidas para o Cálculo foram às noções de retidão local (para a taxa de variação/diferenciação) e de área abaixo do gráfico (para o crescimento cumulativo/integração).

No artigo (TALL, 2001) é destacada a importância dos aspectos sensório-motores e visuais, na composição do pensamento matemático. E que esses aspectos atuam, de maneira importante, numa interface que utiliza o computador. Por meio de ações simples, como, por exemplo, clicar em determinado local e a utilização do teclado para atribuir um valor a uma variável, "fornecem suporte para conceitos teóricos de alto nível" (TALL, 2001, p. 211, tradução nossa).

A manipulação simbólica, que foi ampliada na década de 80, é outra característica dos ambientes computacionais destacada pelo pesquisador. Essa aprimorou a realização de cálculo numérico dos computadores. Além disso, naquela época, Tall revelou-nos a seguinte crença:

> Havia a crença generalizada de que o computador poderia acabar com toda a desordem desnecessária de cálculos e manipulações, permitindo ao indivíduo se concentrar mais em ideias essenciais.
>
> David Tall (2001)

Tall (2001) exemplificou como a inclusão dos computadores e a simplificação de determinados cálculo aconteceu no comércio. Contudo, no ensino da Matemática, tais crenças ainda não foram incorporadas, por exemplo, na Inglaterra a utilização de calculadora com crianças foi desencorajada, pois com a ausência da calculadora seria possível para a criança desenvolver mentalmente relações aritméticas.

Um dos perigos revelados pelo pesquisador na utilização de determinados *softwares*, que realizam manipulações simbólicas, é que apesar deles reduzirem o fardo das manipulações simbólicas ao sujeito, eles podem substituir um procedimento realizado com lápis e papel por uma sequência de teclas digitadas (TALL, 2001, p. 213).

Com o intuito de reduzir a tensão cognitiva do aprendiz em um currículo da Matemática que utiliza o computador, Tall formulou o Princípio da Construção Seletiva[6]. Com esse princípio, o educador deve elaborar um ambiente no qual o aprendiz possa focar em determinada parte da teoria, ao passo que determinados processos subjacentes, que não são o objetivo do educador naquele momento, são executados pelo computador (TALL, 2001, p. 213). Um exemplo de utilização desse princípio relato por Tall aconteceu na pesquisa de Gray e Pitta (1997 apud TALL, 2001). No referido trabalho com um dos sujeitos, o *software* realizava os cálculos e o sujeito concentrava-se nas relações numéricas apresentadas e não nos processos de contagem que faziam parte de repertório de estratégias dele.

[6] Tradução para o termo original *The Principle of Selective Construction* (TALL, 1993a apud TALL, 2001, p. 222)

Outra característica valiosa dos ambientes computacionais é que eles possibilitam o desenvolvimento de atividades de experimentação. Por meio de atividades adequadas, o sujeito pode observar determinado fenômeno e atribuir sentido a ele. Essas atividades podem auxiliá-lo no desenvolvimento das propriedades matemáticas envolvidas (TALL, 2001, p. 225). Para exemplificar isso, o pesquisador trouxe o exemplo do experimento de Feigenbaum, no qual a equação logística $f(x) = \lambda x(1 - x)$ foi iterada para vários valores de λ (GLEICK, 1987 apud TALL, 2001). Por meio dessa investigação a constante de Feigenbaum foi descoberta. Naquele momento, Feigenbaum não foi capaz de formular a prova formal desse fato. Contudo, com a experimentação, ele obteve a percepção de um fenômeno que foi posteriormente provado por Lanford (1982 apud TALL, 2001).

Entretanto, Tall chamou a atenção para um importante aspecto que deve ser considerado quando a tecnologia é utilizada para o desenvolvimento da Matemática:

> As experiências desenvolvem aspectos perspicazes que apoiam a teoria, mas também podem levar a uma variedade de outras imagens mentais que podem ser diferentes das ideais matemáticas atualmente detidas por especialistas.
>
> David Tall (2001)

INDICAÇÕES DE ABORDAGENS DE ENSINO QUE UTILIZARAM O COMPUTADOR

Nesta seção são exibidas indicações de abordagens de ensino, que emergiram da pesquisa de Almeida (2013), desenvolvidos por David Tall e seus colaboradores que utilizaram o computador.

Uma primeira indicação de abordagens de ensino, para o conceito de limites de sequências e séries, emergiu em Tall e Schwarzenberger (1978). Nesse artigo, o conceito de limite de sequência apareceu integrado com o conceito de números reais por meio da sequência de aproximações decimais de um número real k (TALL; SCHWARZENBERGER, 1978, p. 5). Essa integração foi possível pelo fato de possuirmos uma precisão limitada na representação, em uma folha de papel, de um segmento com medida igual a um número irracional. Com esse fato, os autores pretendem desenvolver a definição formal de limite de uma sequência de números reais (s_n) que converge ao número real s.

Outra indicação de abordagens surgiu no estudo Tall e Li (1992). Nesse estudo, os pesquisadores conduziram um experimento por meio de um curso realizado com estudante da Universidade de Warwick no decorrer de curso de 20 semanas. Nesse curso, os estudantes foram convidados a programar determinadas sentenças e séries, e, investigar o comportamento dos termos delas para determinados valores da variável dependente. Após essa atividade, os sujeitos foram apresentados à definição formal do conceito de limite.

Posteriormente, Tall (2001) refletiu sobre três falhas existentes na abordagem do conceito de limites proposta no estudo citado no parágrafo anterior. A primeira falha detectada foi que em determinadas sequências, o computador demorava a realizar os cálculos, e isso reforçou a ideia que o limite é um processo que não termina. Com relação ao tópico convergência de sequências, o objetivo do curso era promover intuições, por meio de uma precisão fixada, com o intuito de desenvolvê-la para a definição formal do tópico. Apesar desse tipo de abordagem, comparando os resultados do pré-teste para o pró-teste, a maioria dos sujeitos da pesquisa respondeu incorretamente as questões formuladas. Um último tópico foi dedicado à discussão de que um decimal infinito pode ser visto como um limite de sequência aproximações decimais. Em entrevistas realizadas com os estudantes foi possível constatar que eles continuaram a conceber a dizima periódica 0,999... como uma sequência de números mais próxima de um e não como um valor fixo.

Com relação ao conceito de continuidade, o pesquisador utilizou e elementos da Análise Não-Standard, com o objetivo de fornecer uma base formal adequada às intuições manifestadas pelos alunos. No artigo (TALL, 1981, p. 13), o pesquisador exibiu a definição do conceito de continuidade no contexto da Análise Não–Standard. Além disso, Tall propôs uma abordagem intuitiva para o conceito de continuidade, utilizando o computador. Ela consiste no seguinte, em considerar

> [...] um gráfico desenhado "continuamente" nesse sentido intuitivo, simplesmente esticando-o horizontalmente, mantendo a escala vertical constante, retire essa imagem do gráfico em uma janela separada.
>
> David Tall (1993)

O resultado do processo descrito anteriormente foi ilustrado abaixo (Figura 1):

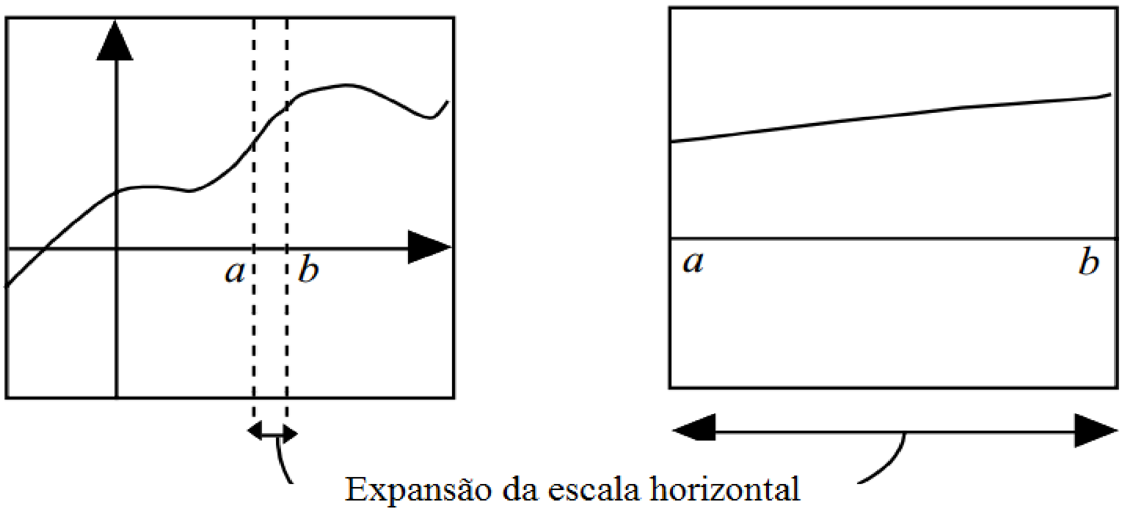

Figura 1: Esticando um gráfico horizontalmente (TALL, 1993, p. 11).

Com essa abordagem, na qual uma porção do gráfico de uma função é "horizontalmente esticada", é possível introduzir a definição formal de continuidade de uma função no ponto x_0 (TALL, 1993, p. 12).

Com relação ao conceito de derivada, no artigo (TALL, 1981, p. 14), o pesquisador exibiu uma indicação de abordagem de ensino, na qual o conceito de derivada seria definido no contexto da Análise Não-Standard. Utilizando a função, nomeada pelo pesquisador, microscópio-δ centrado em $(x, f(x))$, ele afirmou: "Surpreendentemente, vemos o gráfico como uma linha reta" (TALL, 1981, p. 17). Contudo, essa construção foi feita de maneira teórica, utilizando resultado da Análise Não–Standard e representações com lápis e papel.

Com a evolução dos computadores, Tall retomou as ideias descritas no parágrafo anterior. Com auxílio do computador, ele construiu imagens que desenvolvessem motivações adequadas à noção de funções diferenciáveis. Ele indicou que essa noção pode ser "motivada simplesmente ampliando seu gráfico, *mantendo a mesma escala relativa nos eixos*" (TALL, 1993, p. 11, tradução nossa, grifo do autor). Com isso, quando a representação gráfica de uma função é ampliada, a aparência dessa porção do gráfico é idêntica a um segmento de reta. Logo, a inclinação do segmento de reta, exibido na tela, será a mesma inclinação da reta tangente à função.

Na figura abaixo (Figura 2) é exibido esse *software* sendo utilizado para a função $g(x)$ = sen x. Na segunda janela do *software* é possível perceber que a representação gráfica da função g fica parecida com uma linha reta, assim como a conclusão teórica obtida com auxílio da função microscópio-δ.

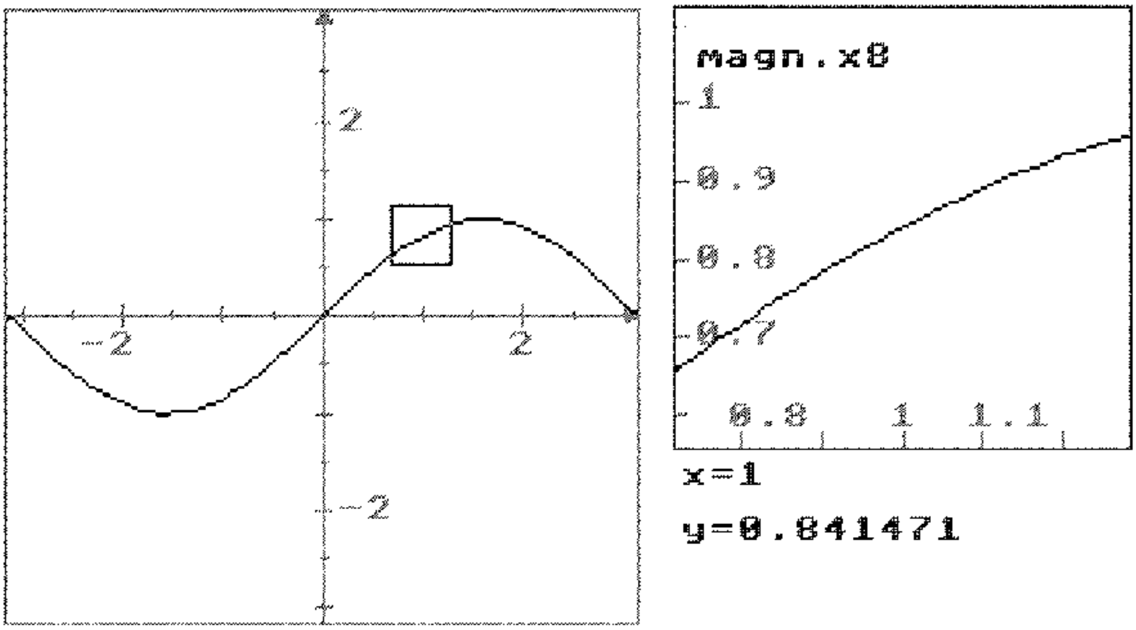

Figura 2: Representação do organizador genérico *Magnify* (TALL, 2000, p. 12).

A noção descrita anteriormente foi nomeada pelo pesquisador como "retidão local". Ela seria uma raiz cognitiva apropriada para o conceito de derivada, pois ela "permite que a inclinação da *função* seja vista como a mudança de inclinação *do próprio gráfico*" (TALL, 2000, p. 11, tradução nossa, grifo do autor).

Com relação ao conceito integral definida, o pesquisador recorreu à função área abaixo do gráfico de uma função em dois artigos (TALL, 1993, 2000). Em um primeiro momento, Tall defendeu que a abordagem na qual a integração é reconhecida como o inverso da diferenciação faz com que o papel da continuidade da função integrável fique menos evidente, porém, "quando ao conceito de integração é dado um significado independente por meio da soma, a função da continuidade torna-se mais evidente" (TALL, 1993, p. 13, tradução nossa).

Segundo Tall "as noções corporificadas de 'área' e 'área até o momento'[7] podem apoiar a Integração de Riemann e até a de Lesbegue" (TALL, 2000, p. 16, tradução nossa). Essas noções podem ser ampliadas com um computador e *softwares* desenvolvidos apropriadamente, pois eles podem ser utilizados para calcular a área numérica e relacionar a noção de continuidade à noção de integração.

Com relação ao conceito de equações diferenciais, Tall sugeriu a introdução desse tópico[8] por meio da seguinte situação problema:

> Considere o problema inverso da diferenciação (Não, esse não é a integração!). O problema é o seguinte – se você conhece a inclinação de uma função em qualquer ponto, como podemos construir o gráfico que tem essa inclinação?
>
> David Tall (2000)

O objetivo do pesquisador com essa questão foi propiciar um significado corporificado ao estudante, apresentando outras abordagens que não aquela utilizada, em geral, a abordagem simbólica. Além disso, o pesquisador e seus colaboradores (BLOKLAND; GIESSEN; TALL,

[7] Tradução da expressão '*area-so-far'* utilizada no artigo.

[8] Tall (2000, p. 14) considera uma equação diferencial linear do seguinte modo: $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$.

2000 apud TALL, 2001) desenvolveram um *software* que constrói a solução gráfica para uma equação diferencial de 1ª ordem, na qual o *mouse* é utilizado para mover um pequeno segmento, cuja inclinação é definida pela equação diferencial, e, com um clique sobre o plano cartesiano, esse segmento é fixado no plano.

CONCLUSÕES

Com as considerações deste artigo, espera-se trazer uma contribuição ao VI HTEM, com a exposição de considerações sobre a aprendizagem de conceito do Cálculo Diferencial e Integral sob a perspectiva de um importante pesquisador do campo da Educação Matemática. As contribuições de Tall e colaboradores para essa área, compiladas e apresentadas neste trabalho são destinadas tanto para a sala de aula, quanto para futuras pesquisas do campo da Educação Matemática.

Referências

Almeida, M. A. (2013) *Um Panorama de Artigos sobre a Aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral na Perspectiva de David Tall*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, SP, Brasil.

Bardin, L. (1979) *Análise de Conteúdo*. São Paulo: Edições 70, Livraria Martins Fontes (Obra original publicada em 1977).

Bursztyn, M.; Drummond, J. A.; Nascimento, E. P. (2010) *Como escrever (e publicar) um trabalho científico: dicas para pesquisadores e jovens cientistas*. Rio de Janeiro: Garamond, p. 17 – 41.

Cornu, B. (1991) Limits. In TALL, D. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Boston / Londres: Kluwer Academic Publishers, p. 153–166.

Downs, M. L. N.; Mamona–Downs, J (2008) Advanced Mathematical thinking and the role of mathematical structure. In L. D. English (Ed.). *Handbook of International Research in Mathematics Education* (p. 154 – 174). New York: Routledge.

Felizardo, S. B. (2005) *Aplicação da Análise Não-Standard à Teoria da Medida: uma representação hiperfinita de medida de Lesbegue*. Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, Brasil.

Fiorentini, D.; Lorenzato, S. (2009) *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos* (3a ed.). Campinas: Autores Associados.

Tall, D. O. (1981) Infinitesimals constructed algebraically and interpreted geometrically. *Mathematical Education for Teaching*, *4* (1), 34–53.

Tall, D. O. (1986) *Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus Using Interactive Computer Graphics*. Doctoral thesis. University of Warwick.

Tall, D. O. (Ed.) (1991) *Advanced Mathematical Thinking*. Boston / Londres: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. O. (1993) Real Mathematics, Rational Computers and Complex People. *Proceedings of the Annual International Conference on Technology in College Mathematics Teaching*. Addison-Wesley, p. 243 – 258.

Tall, D. O. (2000) Biological Brain, Mathematical Mind & Computational Computers (how the computer can support mathematical thinking and learning). *Proceedings of the Asian*

Technology Conference in Mathematics, Chiang Mai, Thailand. ATCM Inc, Blackwood, p. 3 – 20.

Tall, D. O. (2001) Cognitive development in advanced mathematics using technology. *Mathematics Education Research Journal*, *12* (3), p. 210 – 230.

Tall, D. O.; Li, L. (1992) Constructing Different Concept Images of Sequence & Limits by Programming. *Proceeding Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 17(2), Tsukuba, JAP, p. 41 – 48.

Tall, D. O.; Schwarzenberger, R. L. E. (1978) Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching*, *82*, p. 44 – 49.