VISUALIZAÇÃO DE FUNÇÕES COMPLEXAS VIA PADRÃO DE CORES

Wladimir Seixas

Universidade Federal de São Carlos

seixas@ufscar.br

Thaisa Alves Pianoschi

Centro Universitário da Fundação Educacional de Barretos

thaisaap@hotmail.com

As funções de uma variável complexa podem ser estudadas como transformações no plano complexo. Esta abordagem, pouco explorada nas disciplinas de Variável Complexa dos cursos de graduação, mostra-se interessante, pois permite a visualização e conecta este assunto às demais áreas da Matemática, por exemplo, vetores, cônicas, matrizes, entre outras. Neste trabalho desenvolve-se um método que irá associar a cada ponto do plano complexo uma cor definida em uma paleta de cores definindo assim uma aplicação contínua e bijetora entre o plano complexo e a paleta de cores. Isto permitirá a visualização das funções complexas como transformações no plano vistas agora de forma pontual. Desta maneira, o algoritmo que irá colorir o plano complexo associado a uma dada função permite uma visualização quase contínua do comportamento da função. Os zeros da função, suas multiplicidades e outras propriedades básicas como simetria e periodicidade podem ser facilmente esboçadas.

Palavras-chaves: Variáveis complexas. Transformações no plano. Visualização de funções complexas.

INTRODUÇÃO

As funções de uma variável complexa podem ser estudadas como transformações no plano complexo. Esta abordagem, pouco explorada nas disciplinas de Variável Complexa dos cursos de graduação, mostra-se interessante pois permite a visualização e conecta este assunto às demais áreas da Matemática, por exemplo, vetores, cônicas, matrizes, entre outras. As transformações no plano complexo são descritas facilmente por um método discreto que consiste em analisar o comportamento de uma malha retangular que é transformada por uma dada função complexa. No entanto, por este tratamento ser discreto não visualiza-se como pontos próximos são transformados. Neste sentido, uma discretização maior do plano complexo pode ser feita fazendo uso de cores para a visualização das transformações complexas. Neste trabalho desenvolve-se um método que irá associar a cada ponto do plano complexo uma cor definida em uma paleta de cores definindo assim uma aplicação contínua e bijetora entre o plano complexo e a paleta de cores. Isto permitirá a visualização das funções complexas como transformações no plano vistas agora de forma pontual. Desta maneira, o algoritmo que irá colorir o plano complexo associado a uma dada função permite uma visualização quase contínua do comportamento da função. Os zeros da função, suas multiplicidades e outras propriedades básicas como simetria e periodicidade podem ser facilmente esboçadas. Por exemplo, a cor branca irá se referir ao zero da função. Os valores da função próximos de zero terão cores claras enquanto valores que estão tendendo ao infinito terão cores mais escuras. A periodicidade das funções será vista pela repetição de padrões e de cores. Para esta visualização é utilizado o programa gráfico Asymptote© (asymptote.sourceforge.net). Asymptote© é uma linguagem de programação descritiva vetorial gráfica que fornece um referencial baseado em coordenadas para desenhos técnicos. A maior vantagem do Asymptote© sobre os demais pacotes gráficos é sua linguagem de programação de alto nível. Ressalta-se que o uso do Asymptote© será apenas para a geração de figuras. Este programa não é utilizado como recurso computacional para auxiliar em atividades didáticas. Neste sentido, existem diversos programas, como por exemplo, o Geogebra©, que se mostram mais adequados.

FUNÇÕES COMPLEXAS

Definição 1. Um número complexo é definido como um par ordenado *(x; y)* de números reais *x* e *y*.

Denota-se por $\mathbb{C}$ o conjunto de todos os números complexos, ou seja, $\{(x, y) \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$. Dado o número complexo *z = (x; y)*, o número real *x* é chamado de parte real de *z* e o número real *y* de parte imaginária de *z* denotando-se por *Re(z)* e *Im(z)*, respectivamente. Sejam $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$. Define-se a igualdade entre elementos de $\mathbb{C}$ por:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ e } y_1 = y_2,$$

ou seja, dois números complexos são iguais se, e somente se, suas respectivas partes reais e imaginárias forem iguais. Enfatiza-se que a igualdade de pares ordenados é dada pela igualdade das respectivas componentes dos pares ordenados e estas ocorrem no conjunto dos números reais.

No conjunto $\mathbb{C}$ define-se as operações aritméticas de:

Adição: $z_1 \oplus z_2 = (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$

Multiplicação: $z_1 \odot z_2 = (x_1, y_1) \odot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2).$

As operações aritméticas acima estão bem definidas e são fechadas.

O conjunto dos números complexos definido como pares ordenados de números reais admite uma representação geométrica a partir da identificação de pares ordenados com pontos do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Em outras palavras, existe um isomorfismo entre o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ e o plano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Neste caso, denomina-se plano complexo ou **plano de Argand** ao invés de plano cartesiano.

Definição 2. *Uma função complexa f entre os subconjuntos A e B de* $\mathbb{C}$ *é uma lei (ou regra) que associa cada número complexo z de A um único número complexo w de B indicado por w = f(z).*

Denomina-se *A* domínio e *B* contradomínio da função *f*. Todo número complexo $z \in A$ é chamado de variável complexa ou independente da função *f*, enquanto que $w = f(z) \in B$ é denominada variável dependente. Usualmente representa-se a função *f* entre os conjuntos *A* e *B* como $f : A \subseteq \mathbb{C} \to B \subseteq \mathbb{C}$ com $w = f(z) \in B$ para todo $z \in A$. O conjunto $\text{Im}(z) = \{f(z), \text{ para todo } z \in A\}$ é chamado conjunto imagem da função complexa *f*.

Sabe-se que para a função de uma variável real, $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ define-se como gráfico de *f* o conjunto de todos os pares ordenados *(x, f(x))*, no qual *x* pertence ao domínio D_f de f, isto é,

$$\text{Graf}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x) \text{ para todo } x \in D_f\}.$$

Não é possível visualizar o gráfico de uma função complexa *f*, pois trata-se de uma superfície bidimensional representada em um espaço ambiente quadridimensional. Isto é devido ao fato de que as variáveis, independente e dependente, são complexas e portanto representadas, cada uma delas, em um ambiente bidimensional denominado plano-z e plano-w, respectivamente. Desta maneira, para cada ponto $z = (x, y)$ do plano-z pertencente ao domínio da função *f*, está associado um único ponto $w = (u, v)$ do plano-w onde $w = f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$. Denomina-se transformação de pontos do plano-z em pontos do plano-w a relação estabelecida pela função *f* entre os respectivos valores do domínio e da imagem da função f. O estudo do comportamento da função complexa *f* será feito a partir de uma região (ou lugares geométricos) definidos no domínio de *f* e de como estes objetos são transformados pela função *f* em novas regiões (ou lugares geométricos) representados no plano-w

FUNÇÕES COMPLEXAS COM TRANSFORMAÇÕES NO PLANO

Exemplo 1: $w = f(z) = z^2$

Definição 3. Seja $z = x+iy$ uma variável complexa. Denomina-se função quadrática toda função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = az^2+bz+c$ com *a*, *b* e *c* constantes complexas e a $a \neq 0$.

Considere o caso particular para valores de *a*, *b* e *c*: **a = 1 e b = c = 0.** Sejam $z = x + iy$ e $w = u + iv$ pontos nos respectivos planos complexos. A função quadrática $w = f(z) = z^2$ é definida, em coordenadas cartesianas, pelas relações: $u = x^2 - y^2$ e $v = 2xy$. Assim, verifica-se que esta função transforma as retas $x = x_0$ e $y = y_0$ constantes não ambas nulas no plano-z (retas paralelas aos eixos coordenados *Oy* e *Ox* respectivamente) em parábolas no plano-w. De fato, considere os pontos *(x, y)* sob a reta $x = x_0$ constante não nula. Então

$$u = x_0^2 - y^2 \quad \text{e} \quad v = 2x_0y.$$

Substituindo $y = \dfrac{v}{2x_0}$ na expressão de *u* tem-se que

$$u = x_0^2 - \frac{v^2}{4x_0^2}$$

A equação acima representa o lugar geométricos dos pontos do plano-w que estão sobre uma parábola de foco *F(0, 0)* e reta diretriz $u = 2x_0^2$. Ao variar o valor de x_0 é obtida uma família de parábolas todas de mesmo foco. Observe que o foco independe da escolha do valor de x_0 e que todas as retas diretrizes estão localizadas no semiplano $u > 0$.

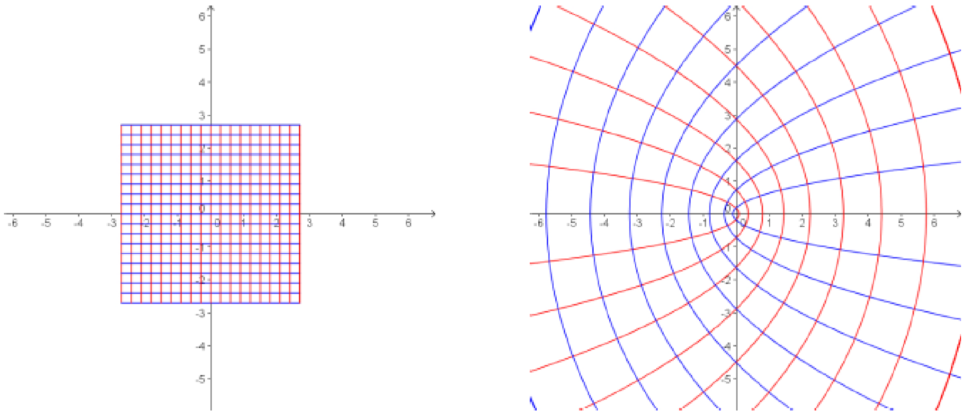
Agora, ao invés de *x*, considere $y = y_0 \neq 0$ constante, isto é, o lugar geométrico dos pontos pertencentes a reta $y = y_0 \neq 0$. Assim, $u = x^2 - y_0^2$ e $v = 2xy_0$. Substituindo $x = \dfrac{v}{2y_0}$ na expressão de *u* tem-se que

$$u = \frac{v^2}{4y_0^2} - y_0^2.$$

Novamente, os pontos *(u,v)* estão sobre uma parábola no plano-w. Neste caso, todas as parábolas possuem foco dado por F(0; 0) e retas diretrizes $u = -2y_0^2$ todas localizadas no semiplano $u < 0$.

Para o caso em que $x = 0$ e $y \neq 0$ qualquer tem-se que $u = -y^2$ e $v = 0$, ou seja, obtém-se o semieixo *Ou* negativo do plano-w. Da mesma forma, quando $y = 0$ e $x \neq 0$ qualquer, u $u = x^2$ e $v = 0$, tem-se o semieixo *Ou* positivo. Além disso, se *x* = *y* = *0* então *u* = *v* = *0*.

Finalmente, se se $x = y \neq 0$ segue que $u = 0$ e $v = 2xy > 0$. Desta maneira, obtém-se o semieixo *Ov* positivo. Analogamente, se $x = -y \neq 0$ segue que $u = 0$ e $v = 2xy < 0$, resultando no semieixo *Ov* negativo. Isto conclui todas as possibilidades para pontos considerados no plano-z. O resumo da análise feita encontra-se na figura 1.



(a) Plano$-z$ (b) Plano$-w$

Figura 1: Função $f(z) = z^2$

Exemplo 2: Função raiz quadrada

Para o estudo da função raiz quadrada se faz necessário definir o conceito de função inversa de uma função complexa.

Definição 3. *Seja* $f : \mathrm{Dom}(f) \subset \mathbb{C} \to \mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{C}$. *A função* $f^{-1} : \mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *que satisfaz* $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id$ *sendo Id a função identidade é denominada função inversa de f.*

Se a função *f* for bijetora, isto é, injetora e sobrejetora, então a função *f* irá admitir função inversa. Em termos de transformações no plano complexo, a função inversa será a transformação inversa para uma dada transformação.

Seja a função quadrática $f(z) = z^2$. Deseja-se determinar a função f^{-1} tal que $f \circ f^{-1}(z) = f^{-1} \circ f(z) = z$. Isto equivale a escrever

$$f \circ f^{-1}(z) = f(f^{-1}(z)) = (f^{-1}(z))^2 = z.$$

Logo, f^{-1} é uma função tal que o quadrado de f^{-1} é igual a *z*.

Primeiramente observa-se que se $w = f^{-1}(z)$ tal que $w^2 = z$ então -*w* também satisfaz a condição $(-w)^2 = z$. Tendo isso em mente, seja $w = f^{-1}(z) = u + iv$. Se *z* = *x* + *iy* então

$$(u + iv)^2 = x + iy.$$

Igualando as partes real e imaginária tem-se

$$\begin{aligned} u^2 - v^2 &= x \\ 2uv &= y. \end{aligned} \tag{1}$$

Supondo que $y \neq 0$ segue que por (1b) $u \neq 0$. Assim,

$$v = \frac{y}{2u}. \tag{2}$$

Substituindo em (1a)

$$u^2 - \frac{y^2}{4u^2} = x.$$

Logo,

$$4u^4 - 4xu^2 - y^2 = 0$$

é uma equação do segundo grau em u^2. Determinando suas raízes tem-se que

$$u^2 = \frac{4x \pm \sqrt{16x^2 + 16y^2}}{8} = \frac{x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{2}.$$

Considerando apenas a solução positiva segue que

$$u^2 = \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}.$$

e

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Retornando em (2)

$$\begin{aligned} v &= \frac{y}{2\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}} \\ &= \frac{y}{\sqrt{2}\sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}}} . \frac{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}}{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}} \\ &= \frac{y}{\sqrt{2}} . \frac{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}}{\sqrt{(x^2 + y^2) - x^2}} \\ &= \frac{y}{\sqrt{2}} . \frac{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}}{|y|}. \end{aligned}$$

Escreve-se

$$v = \frac{\text{sinal}(y)}{\sqrt{2}} . \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}$$

onde

$$\text{sinal}(y) = \frac{y}{|y|} = \begin{cases} +1 & \text{se } y > 0 \\ -1 & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

Desta maneira, a função raiz quadrada terá associado a cada número complexo *z = (x, y)* os valores *w = (u, v)* e *-w = (-u,-v)*. A transformação $\sqrt{z}$ é esboçada na figura 2.

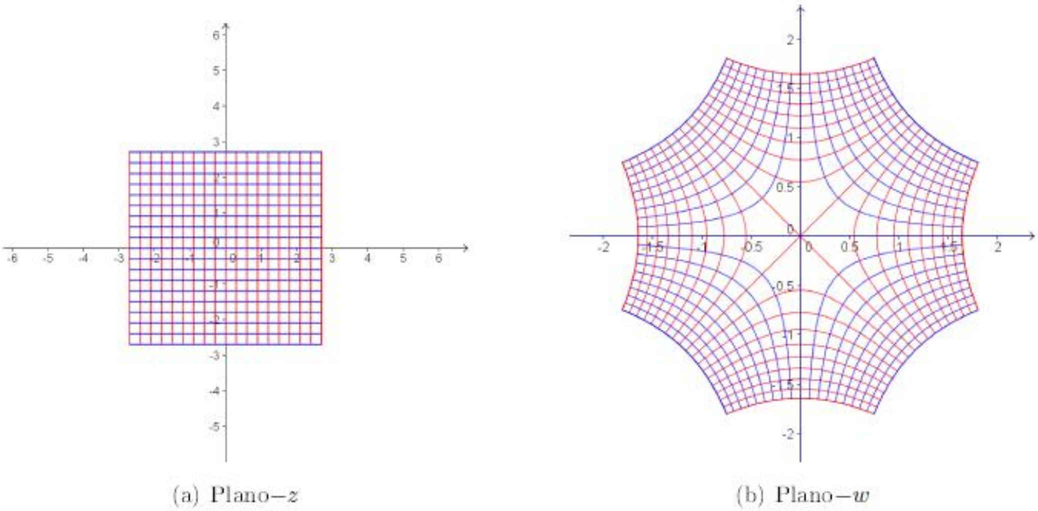


Figura 2: Função $\sqrt{z}$

Como se viu anteriormente para cada valor complexo *z* tem-se dois valores da raiz quadrada de *z*. Diz-se então, que a função raiz quadrada é uma **função multivalente**. Define-se funções multivalentes como funções complexas que, para um valor da variável complexa z, associa-se dois ou mais números w = f(z) distintos entre si. Como Ávila (200) observa, o termo função multivalente é, a rigor, impróprio. No entanto, o uso do termo função multivalente, para o caso das funções complexas, não irá acarretar dúvidas sendo apropriado neste caso. Estas funções podem ser consideradas como formadas por **ramos**, cada um nos quais a função se torna unívoca para os valores de *z* considerados no ramo. Para entender melhor este conceito, considere a representação polar da função raiz quadrada. Seja *z = x + iy* sabe-se que

$$x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = r\,\text{sen}\,\theta,$$

sendo *r > 0* e $\theta \in [0, 2\pi[$. Desta maneira,

$$u = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{r\cos\theta + \sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\,\text{sen}\,\theta)^2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{r\cos\theta + r}}{\sqrt{2}}.$$

Assim,

$$u = \sqrt{r}\sqrt{\frac{\cos\theta + 1}{2}}.$$

Considerando a relação trigonométrica

$$\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\cos\theta + 1}{2}$$

Decorre que

$$u = \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}.$$

De maneira análoga, tem-se que:

$$\begin{aligned} v &= \frac{\mathrm{sinal}(y)\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}}{\sqrt{2}} = \frac{\mathrm{sinal}(r\,\mathrm{sen}\,\theta)\sqrt{\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\,\mathrm{sen}\,\theta)^2}-r\cos\theta}}{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{\mathrm{sinal}(r\,\mathrm{sen}\,\theta)\sqrt{r-r\cos\theta}}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$v = \mathrm{sinal}(r\,\mathrm{sen}\,\theta)\sqrt{r}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

Lembrando que

$$\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

e substituindo na expressão de *v* obtém-se

$$v = \mathrm{sinal}(r\,\mathrm{sen}\,\theta)\sqrt{r}\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}$$

sendo

$$\mathrm{sinal}(r\,\mathrm{sen}\,\theta) = \frac{r\,\mathrm{sen}\,\theta}{|r\,\mathrm{sen}\,\theta|} = \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{|\mathrm{sen}\,\theta|} = \mathrm{sinal}(\mathrm{sen}\,\theta) = \begin{cases} +1 & \text{se } \theta \in]0,\pi[\\ -1 & \text{se } \theta \in]\pi, 2\pi[\end{cases}$$

Logo, $w = \sqrt{z}$ tem como soluções *w = (u, v)* e -*w = (-u,-v)* que correspondem a

$$\begin{cases} u = \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2} \\ v = \mathrm{sinal}(\mathrm{sen}\,\theta)\sqrt{r}\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2} \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} u = -\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{r}\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{2}\right) \\ v = -\mathrm{sinal}(\mathrm{sen}\,\theta)\sqrt{r}\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2} = \mathrm{sinal}(\mathrm{sen}\,\theta)\sqrt{r}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta+2\pi}{2}\right) \end{cases}$$

respectivamente.

Assim, no caso da representação por coordenadas polares, a transformação $\sqrt{z}$ leva os números complexos *z* de mesmo módulo r_0, ou seja, números complexos da forma $z = (r_0, \theta)$ com $0 \leqslant \theta < 2\pi$ (ramo principal) que estão sobre a circunferência de raio r_0 e centro (0, 0) em pontos da semicircunferência de raio r_0 e centro (0, 0) no plano-w. A medida que o ponto no plano-z se move sobre a circunferência com velocidade angular θ, no sentido horário, sua imagem no plano-w move-se no mesmo sentido e com a metade da velocidade da angular partindo do ponto $(r_0, 0)$ chegando ao ponto $(-r_0, 0)$. Desta forma, para completar uma volta fechada, isto é, para atingir novamente o ponto $(r_0, 0)$ é necessário fazer θ variar de 2π a 4π (segundo ramo). No domínio, isto corresponderá a mais uma volta na circunferência de raio r_0 e centro (0,0). Percorre-se assim duas vezes o plano-z. Este processo pode ser concebido imaginando o plano complexo constituído por diversas folhas sobrepostas (ramos). Na primeira volta $(0 \leqslant \theta < 2\pi)$ percorre-se uma circunferência numa folha (ramo principal). Na volta seguinte $(2\pi \leqslant \theta < 4\pi)$, uma nova circunferência é percorrida na folha seguinte. Ao aproximar do final (θ próximo de 4π) a folha superior se liga a folha inferior (ramo principal). Estas folhas definem matematicamente a chamada superfície de Riemann para a função $\sqrt{z}$. Ver figura 3.

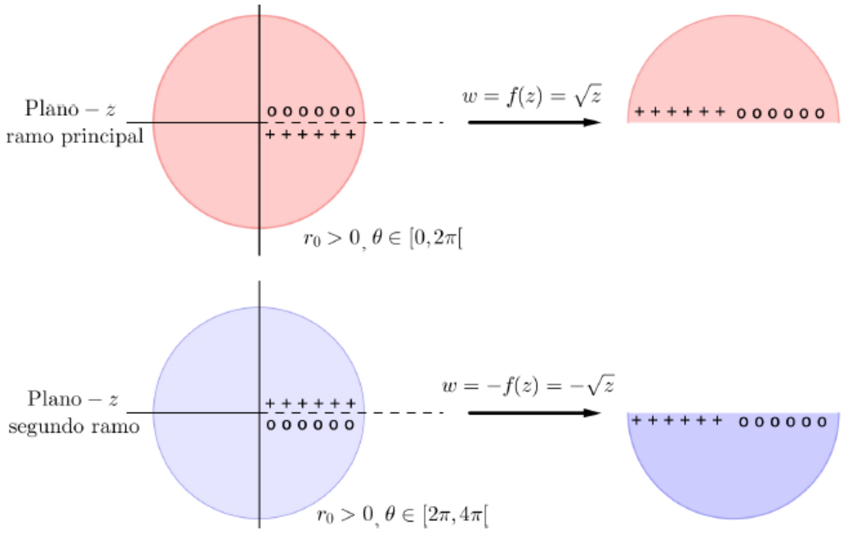


Figura 3: Ramos da função $f(z) = \sqrt{z}$

VISUALIZAÇÃO DE FUNÇÕES VIA PADROES DE CORES

O padrão RGB é um modelo de cores aditivas formado das cores primárias vermelho (*Red*, em inglês), verde (*Green*, em inglês) e azul (*Blue*, em inglês). Este modelo baseia-se em um sistema de coordenadas cartesianas tridimensional onde cada eixo coordenado representa cada uma das três cores primárias. Assim, o eixo *Ox* irá representar a cor vermelha, o eixo *Oy* a cor verde e o eixo *Oz* a cor azul. Cada eixo coordenado, os valores variam no intervalo real fechado [0, 1] onde o valor 0 significa ausência total da componente de cor e o valor 1 a intensidade máxima relacionada à componente. Desta maneira, o subespaço de cores de interesse é um cubo sólido unitário no qual os valores RGB primários estão em três vértices, enquanto as cores complementares magenta (*Magenta*, em inglês), ciano (*Cian*, em inglês) e amarelo (*Yellow*, em inglês) em outros três vértices, a cor preta (*Black*, em inglês) está na origem do sistema e a cor branca (*White*, em inglês) no vértice mais distante da origem. A diagonal principal do cubo, que vai do preto ao branco, representa a escala de cinza (quantidades iguais de cores primárias). A figura 4 ilustra o subespaço de interesse do padrão RGB.

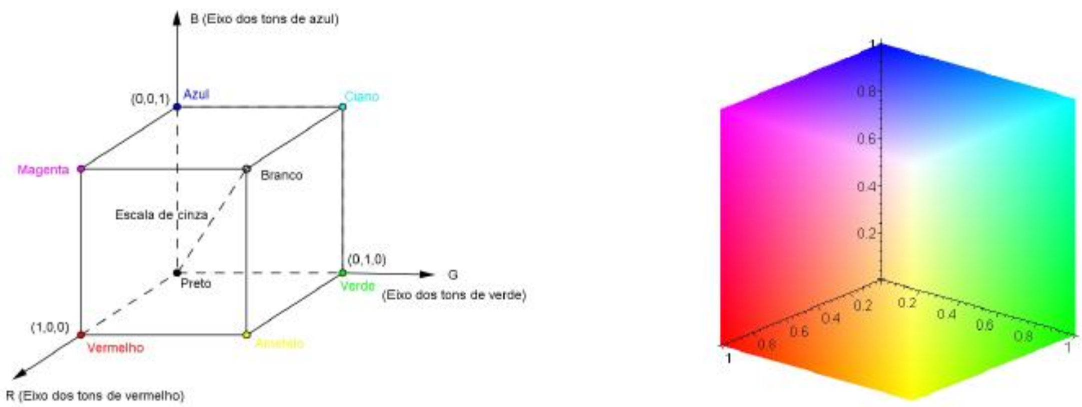
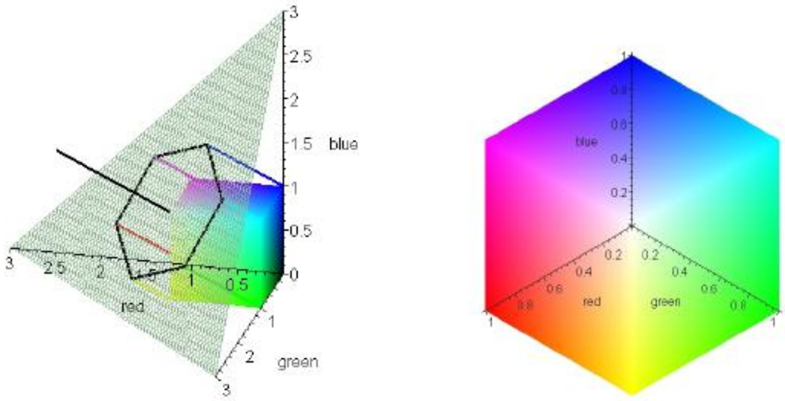


Figura 4: Subespaço de cores do padrão RGB

A projeção isométrica do cubo RGB permite que não somente as três cores primarias sejam representadas, como também as suas complementares (ciano, magenta e amarelo). Para isto, considere a projeção ortogonal dos vértices e das faces do cubo em um plano perpendicular a diagonal do cubo passando pelo ponto (1,1,1). Desta maneira, obtém-se um hexágono com centro neste ponto. As cores primárias estão representadas em três vértices deste hexágono e são separadas por 120 graus. As cores complementares estão representadas nos outros três vértices e estão a 60 graus das cores primárias, ou seja, o ângulo entre as complementares também é de 120 graus. A figura 5 mostra esta representação no plano isométrico.



(a) Vista lateral (b) Vista frontal

Figura 5: Projeção isométrica do cubo de cores RGB

A partir da projeção isométrica do cubo pode-se definir um sistema de paleta de cores denominado HSV (iniciais inglesas das palavras *Hue* (matiz), *Saturation* (saturação) e *Value* (valor)). Basicamente, o sistema HSV define um anel contínuo de cores, retornando à cor inicial após uma volta completa. Os valores para a Matiz, Saturação e Valor irão variar entre 0 e 1. O valor numérico para a Matiz representa a cor, enquanto a Saturação indica a quantidade dominante da matiz, ou seja, da “cor fraca” a “cor forte”. O Valor indica a variação do “claro” ao “escuro”. Pode-se então distribuir o padrão de cores sobre uma esfera da seguinte maneira: a Matiz fixa o meridiano da esfera. Neste meridiano, fixado o Valor em 1 varia-se crescentemente a Saturação de 0 (no polo sul) até 1 (no equador) da esfera. A partir do equador, fixa-se a Saturação em 1 e varia-se agora a quantidade Valor de maneira decrescente de 1 até 0 (no polo norte). Em resumo, o meridiano da esfera terá uma determinada cor que irá variar do branco (polo sul) até a cor total (no equador) e então escurecendo até o preto (no polo norte). O resultado é mostrado na figura 6.

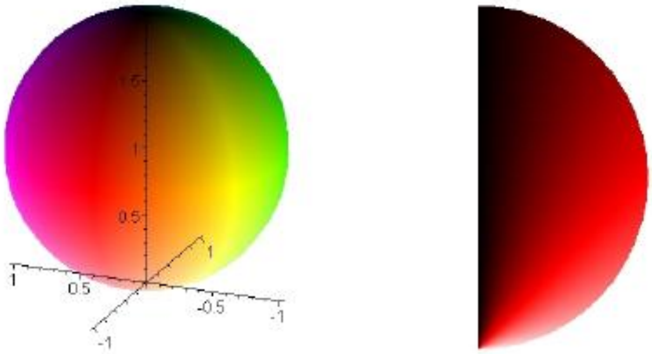


Figura 6: Esfera no padrão HSV e o meridiano para a matiz 0.

Considere a esfera E de raio unitário e tangente ao plano complexo no ponto $z = (0; 0)$. Denota-se por C = (0,0,1) o centro da esfera, N = (0,0,2) seu pólo norte e S = (0,0,0) o pólo sul identificado com a origem do plano complexo. Dado um ponto qualquer P da esfera, diferente de N, determina-se a semirreta NP que intercepta o plano complexo no ponto z. Observe que cada ponto no plano é determinando de maneira única, isto é, a cada ponto do plano corresponde um único ponto da esfera E e vice-versa. Desta maneira, pode-se definir a aplicação que associa ao número complexo *z* o ponto *P* da esfera. Esta aplicação denomina-se projeção estereográfica da esfera E sobre o plano complexo.

Para a visualização das funções complexas será utilizado o programa gráfico Asymptote© (asymptote.sourceforge.net). Asymptote© é uma linguagem de programação descritiva vetorial gráfica que fornece um referencial baseado em coordenadas para desenhos técnicos. A maior vantagem do Asymptote© sobre os demais pacotes gráficos é sua linguagem de programação de alto nível. Nos exemplos, a seguir, a implementação computacional discretiza uma região do plano complexo em 1000 x 1000 pontos = 10^4 pontos (resolução). Sejam $z_{ij}, \; i, j = 1 \ldots 1000$ estes pontos. A função complexa *f* é calculada em cada um destes pontos determinando assim os valores $w_{ij} = f(x_{ij})$. Determina-se a cor associada ao ponto w_{ij} através da projeção estereográfica do ponto w_{ij} sobre a esfera HSV.

Desta maneira, o algoritmo que irá colorir o plano complexo associado a uma dada função permite uma visualização quase contínua do comportamento da função. Os zeros da função, suas multiplicidades e outras propriedades básicas como simetria e periodicidade podem ser facilmente esboçadas. Por exemplo, a cor branca irá se referir ao zero da função. Os valores da função próximos de zero terão cores claras enquanto valores que estão tendendo ao infinito terão cores mais escuras. A periodicidade das funções será vista pela repetição de padrões e de cores.

A seguir, exibem-se os a figuras resultantes deste estudo. A figura 7 mostra o plano colorido pela função identidade $f(z) = z$.

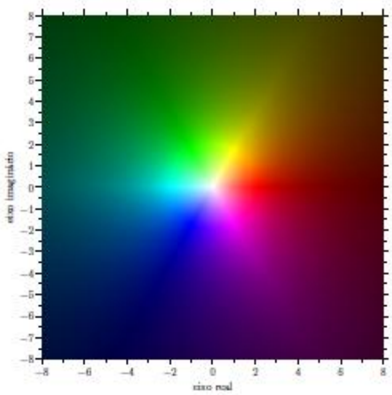


Figura 7: O plano complexo segundo o padrão de cores.

A figura 8 mostra a função z-quadrado segundo o padrão de cores. Observe a repetição de cores e o comportamento dos pontos de valores complexos com módulo menor e maior que 1 comparativamente ao padrão de cores exibido na figura 7.

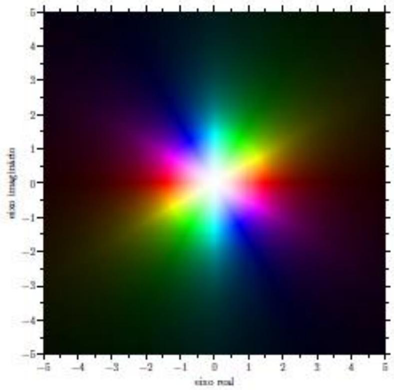
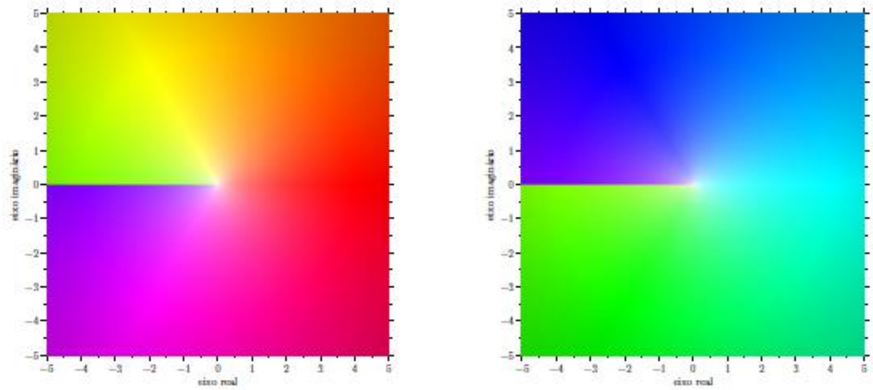


Figura 8: Função $f(z) = z^2$ segundo padrão de cores.

A figura 9 exibe a função raiz quadrada e seus dois ramos.



(a) Ramo principal: $f(z) = \sqrt{z}$ (b) Segundo ramo: $f(z) = -\sqrt{z}$.

Figura 9: Função raiz quadrada e seus ramos.

Pelo padrão de cores é possível observar na figura 9 que a cor verde presente ao longo do semieixo x negativo no ramo principal faz a ligação deste com o segundo ramo enquanto que a cor violeta faz ligação da figura 9 (b) com figura 9 (a). Desta forma, visualiza-se uma interpretação da superfície de Riemann discutida anteriormente.

CONCLUSÃO

Este trabalho restringiu-se às funções z-quadrado e raiz quadrada, mostrando para esta última a visualização dos ramos. Aplicando este mesmo método para as funções exponencial e seno para valores complexos pode-se visualizar os zeros (cor branca) e a periodicidade das mesmas (pela repetição do padrão de cores). Isto é mostrado na figura 10.

(a) $f(z) = e^z$ (b) $f(z) = \sin z$

Figura 10: Funções exponencial e seno complexas.

Por fim, ressalta-se o aspecto pedagógico deste trabalho que valoriza o tratamento geométrico das transformações complexas pois proporciona uma melhor compreensão de tais conceitos poucas vezes explorados nas disciplinas de Variável Complexa dos cursos de graduação.

Referências

Ávila, G. (2000). *Variáveis Complexas e Aplicações*. 3. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A..

Gamelin, T. W. (2001). *Complex Analysis*. New York: Springer-Verlag, 2001. (Undergraduate texts in mathematics).

Hammerlindi, A.; Bowman, J.; Prince, T. (2004). *Asymptote: the Vector Graphics Language (Version 2.21)*. Disponível em: <http://asymptote.sourceforge.net>.

Hubika, J.; Kovacs, Z.; Nyregyhaza, Z. K. (2004). *Visualizations on the complex plane*. ZDM, v. 36.

Pianoschi, T. A. (2013). *Visualização das funções complexas e do Teorema Fundamental da Álgebra*. Dissertação de Mestrado. Rio Claro: Unesp.

Rabinowitz, S. (1993). *How to find the square root of a complex number*. Mathematics and Informatics Quarterly, n. 3, p. 54-56.

Copyright © 2013 Wladimir Seixas e Thaisa Alves Pianoschi. Os autores concedem licença não exclusiva, aos organizadores do VI HTEM, para publicar este documento no CD de trabalhos completos do evento. Qualquer outro uso é proibido sem o consentimento dos autores.