INTERVENÇÃO DE TECNOLOGIAS E NOÇÕES DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO NO ESTUDO DE INTEGRAIS MÚLTIPLAS NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Afonso Henriques
Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC
Ilhéus, Bahia, Brasil
henry@uesc.br
Rogério Serôdio
Universidade da Beira Interior – UBI
Covilhã, Portugal
rserodio@ubi.pt

RESUMO

Neste artigo apresentamos os estudos que vimos desenvolvendo em torno do ensino de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), utilizando o software Maple, a partir da análise institucional em torno das Integrais Múltiplas (IM) no curso de Licenciatura em Matemática da UESC como instituição de referência, onde identificamos dificuldades que têm motivado a construção de técnicas instrumentais, como o crivo-geométrico (HENRIQUES. 2006), na realização das tarefas provenientes da praxeologia das IM e suas aplicações nas instituições de Educação Básica (IEBa). Buscamos respostas para os questionamentos: que conteúdos das IEBa podem ser trabalhados neste curso visando suas relações possíveis com as IM? Como essas relações ocorrem? Como é que as tecnologias permitem instrumentalizar essas relações e com que registros? Para respondermos a estas questões, encontramos fundamentação na teoria de Instrumentação de Rabardel (1992), referente à aprendizagem de ferramentas tecnológicas, na teoria Antropológica do Didático, proposta por Chevallard (1999) e nas noções de registro de representação semióticas de Duval (1993).

Palavras-chave: Instituição de referência, Instituição de aplicação, Integrais Múltiplas, Registros. Software Maple.

INTRODUÇÃO

Como é sabido, o Cálculo Diferencial e Integral (*CDI*) é uma das matérias da área de Matemática presente em todos os cursos de Ciências Exatas, da Terra e de Engenharia, nas instituições de ensino superior (*IES*), e está decomposto em *CDI I*, *CDI II*, *CDI III* e em al-gumas vezes até em *CDI IV*, caracterizando-se como domínio de conhecimentos imprescindí-veis na formação de recursos humanos, nestes cursos. Nesta decomposição, as Integrais Múlti-plas (*IM*) encontram um espaço em *CDI III* ou *CDI IV*, dependendo do projeto acadêmico curri-cular de cada curso. Constatamos diversas dificuldades dos estudantes na aprendizagem das *IM*, e principalmente na aplicação ou utilização dos conhecimentos inerentes. Analisar os fenôme-nos emergentes do processo de ensino e aprendizagem deste domínio é um dos nossos interes-ses. Particularmente, nos cursos de licenciatura em Matemática, muitos alunos têm-se pergun-tado: *sendo futuro profissional que vai atuar nas Instituições da Educação Básica (IEBa), por quê tenho que estuar Integrais Múltiplas (IM)?* Perguntas desse tipo podem ser respondidas pela necessidade do desenvolvimento de competências do futuro profissional e pela existência de re-lações entre os conteúdos das *IM* com os das *IEBa*. A intervenção de tecnologias com uso de potencialidades de softwares matemáticos, assim como a mobilização de registros de represen-tação explícitos e implícitos no ensino das *IM* exercem um papel fundamental nesta existência. Contudo, nos colocamos os seguintes questionamentos: Que conteúdos das *IEBa* podem ser evocados na referida relação com as *IM*? Como é que essas relações ocorrem? Que potencialidades tem a tecnologia do software como, por exemplo, o Maple, que facilite a com-preensão destas relações? Para respondermos a estas questões apoiamo-nos na teoria de Ins-trumentação de Rabardel (1992), na teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1999) e nas noções de registro de representação semióticas de Duval (1993), que resumimos a seguir.

QUADRO TEÓRICO

Entendemos por *quadro teórico*, como o *referencial teórico* de base de uma pesquisa, escolhido pelo pesquisador em função da sua problemática, constituído, pelo menos, por uma teoria capaz de fornecer ferramentas de análise aos estudos que se pretende desenvolver. Henriques, Attie, Farias (2007) sublinham que:

> As referências teóricas constituem ferramentas necessárias no desenvolvimento de pesquisas, em particular, em didática da matemática, com o objetivo de fundamentar, compreender e interpretar os fenômenos do ensino e aprendizagem.

Assim, com o interesse de analisarmos os fenômenos emergentes do processo de ensino e aprendizagem de *CDI*, em torno das *IM* e suas relações possíveis com os conteúdos matemáticos da Educação Básica, buscamos estudar as abordagens teóricas que nos permitem analisar um dado objeto matemático em vários registros de representações. Fazemos assim, referência às noções de *Registros de Representações Semióticas (RRS)* que foram introduzidas em estudos do funcionamento do pensamento (psicologia da aprendizagem). Essa abordagem tem nos permitido descrever e relacionar, de forma explícita, as representações chamadas de *gráficas* e *analíticas* nos problemas de cálculo das *IM*. É, portanto, uma abordagem que fornece instrumentos importantes para interpretar as representações e suas interações, tanto na tentativa de controlar os objetos manipulados pelo *Maple* como pelo *sujeito* que utiliza o software. Porém, essa abordagem não tem sido suficiente para respondermos às questões que nos colocamos no âmbito *institucional*. Para essas questões, encontramos apoio na *Teoria Antropológica do Didático* (*TAD*). Por utilizarmos um ambiente computacional, como o *Maple*, os nossos estudos teóricos têm-nos levado a considerar a dimensão *instrumental* da aprendizagem em ambientes computacionais. Ou seja, encontramos fundamentação em trabalhos de pesquisas em ergonomia cognitiva, relativos à aprendizagem da utilização de ferramentas tecnológicas. Fazemos assim referência à *Teoria da Instrumentação (TI).* As três teorias constituem o *quadro teórico* do nosso estudo e se articulam naturalmente no desenvolvimento das nossas pesquisas. A naturalidade é notável no decorrer de uma análise institucional quando visamos o estudo das *relações institucionais* a um *instrumento*.

Para explicitarmos essas relações, suponhamos que o objeto **O**, o qual Chevallard (1999) refere nas *relações institucionais* da *TAD*, seja o mesmo objeto que Rabardel (1995) faz referência nas *situações de atividades instrumentais* (*SAI*), e que o *instrumento* denotado por **i**, seja oficialmente reconhecido pela *instituição* **I** onde vive o objeto **O**. Se o ensino, a aprendizagem de **O** e o *instrumento* **i** se encontram em **I**, e neste encontro há intenções de **I** que se traduzem por práticas existentes na instituição, através de *técnicas instrumentais* de **i** utilizadas para se trabalhar com **O**, então podemos falar da *relação institucional e pessoal com um instrumento* **i**. A Figura 1 esquematiza estas relações, levando em conta os três termos primitivos (**I, O** e **X**) considerados por Chevallard que interagem com o

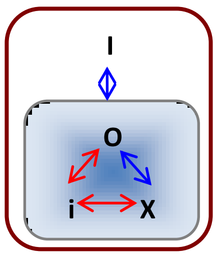


Figura 1: Relações institucionais com um instrumento.

instrumento **i**, referido por Rabardel no modelo *SAI*, quando este se torna um *instrumento* da *instituição* **I**. Assim, Henriques (2006) escrever:

> Um instrumento **i** existe oficialmente para uma instituição **I** se existem as relações da instituição **I** com o instrumento **i** e da instituição **I** com o objeto **O**, denotadas, respectivamente por R(**I,i**) e R(**I,O**), que se traduzem por práticas existentes na instituição quer sejam ou não por meio de técnicas instrumentais de **i**.

Assim, à luz da *TAD* e da *TI*, podemos falar da *relação institucional com as Integrais Múltiplas* utilizando o ambiente computacional *Maple* como um *instrumento* que denotamos por R(**I,i**)•R(**I,O**), ou simplesmente R[**I,**(**i,O**)], assegurando assim a utilização oficial de **i** nas práticas desenvolvidas na relação R(**X,O**)[1] em torno de **O,** em **I**. Estas práticas, em particular no estudo das *IM*, passam necessariamente pela mobilização e manipulação de registros de representação semióticas, pois, como assegura Duval (1993), "na Matemática os objetos não são acessíveis a não ser por meio de registros". Nesses registros, enfatizamos a *conversão* e a *coordenação* entre eles no processo de cálculo de integrais. A análise institucional, como metodologia de pesquisa, fornece ferramentas para identificarmos as condições e exigências que determinam, numa instituição, as referidas práticas institucionais em torno de objetos de estudos, como as *IM*, requeridos na formação de recursos humanos.

Análise Institucional

A nossa pesquisa foi norteada pela metodologia baseada na análise institucional. Henriques, Nagamine e Nagamine (2012, p. 1268) definem uma análise institucional, como:

> Um estudo realizado em torno de elementos institucionais a partir de inquietações/questões levantadas pelo pesquisador no contexto institucional correspondente, permitindo identificar as condições e exigências que determinam, nessa instituição, as Relações Institucionais e Pessoais a objetos do saber, em particular, os objetos matemáticos, as organizações ou praxeologias destes objetos que intervém no processo ensino/aprendizagem.

Pautados na noção de *Noosfera*, os autores defendem que uma instituição é constituída, pelo menos, por um dos elementos do Quadro 1, e afirmam que "em geral, no desenvolvimento de uma pesquisa em Educação, pensamos em uma instituição constituída, no mínimo, por um desses elementos. Mesmo que o pesquisador não explicite ou não use o termo instituição, seu trabalho está sempre inserido em uma instituição".

Quadro 1 - Elementos constituintes de uma instituição

A explicitação ou escolha de uma instituição, doravante chamada *instituição de referência* e/ou

[1] Relações pessoais de um indivíduo X com um objeto **O** da instituição que Chevallard denota por R(X,O). Essa relação só pode ser estabelecida quando **X** entra na instituição **I** onde vive **O,** com certas finalidades, como, por exemplo, realizar um determinado curso que reconhece esse objeto.

de *aplicação* pelo pesquisador, deve conter, pelo menos, um destes elementos. Esta escolha depende, essencialmente, dos objetos de estudos envolvidos na pesquisa, dos objetivos e da problemática da investigação em função das inquietações do pesquisador.

A Educação Básica (Figura 2), como um todo, por exemplo, é uma instituição; as suas partes (primeiro segmento da educação, Ensino Fundamental I, Ensino Fundamental II, Ensino Médio etc.) também o são, podendo ser caracterizadas como instituições de *referência* e/ou de *aplicação*. O termo *referência* é sugestivo, na medida em que identifica o local institucional da realização/aplicação da pesquisa. Uma instituição do ensino superior (*IES*), por sua natureza, é uma instituição no contexto descrito acima. As suas partes, tais como os cursos, também são instituições. Com efeito, podemos falar sobre as relações e o reconhecimento de objetos nas instituições, no contexto descrito por Chevallard (1999).

Figura 2: Educação Básica e suas partes enquanto instituições

Uma *instituição de referência* é, portanto, a instituição na qual o Pesquisador identifica os elementos institucionais (Quadro 1) que pretende analisar. Se a pesquisa envolver um experimento aplicado na instituição, então esta é também de *aplicação*. Contudo, o termo *aplicação* não se restringe necessariamente aos experimentos aplicados no contexto de estudo de práticas efetivas dos estudantes, ou dos alunos em torno de objetos de saber numa instituição. Uma análise das relações possíveis entre os conteúdos/conhecimentos desenvolvidos em diferentes instituições, por exemplo, também se enquadra nessa aplicação.

No presente artigo, consideramos duas *instituições*[2]: o curso de *Licenciatura em Matemática da UESC* como *instituição de referência* e o *2º Ano do Ensino Médio* como *instituição de aplicação*. Nestas instituições analisámos o Projeto Acadêmico Curricular (*PAC*), o Projeto Político Pedagógico (*PPP*), os Parâmetros Curriculares Nacionais (*PCN)*, os Livros didáticos (*LD*) e a Tecnologia (no caso o software Maple) como elementos institucionais. Em função da complexidade destes elementos, apresentamos neste artigo, as análises desenvolvidas em torno dos dois últimos elementos (*LD* e Tecnologia) em torno da praxeologia das *IM*.

Sublinhamos que a noção de *relação institucional* de uma instituição **I** com um objeto **O, R(I,O)**, está ligada às atividades institucionais que são desenvolvidas em sala de aula. Esta noção é, de certo modo, caracterizada por diferentes tipos de tarefas que os estudantes ou alunos devem efetuar e pelas razões que justificam tais tarefas ou práticas sociais que funcionam numa instituição em torno de **O**. Nesta ótica, Chevallard (1992) propôs a noção de *organização praxeológica*, ou simplesmente *praxeologia* (como conceito chave ou modelo), para estudar as práticas institucionais relativas a um objeto O e, em particular, as práticas sociais na matemática. Este modelo é descrito pelas quatro noções seguintes:

- **T** representa um tipo de **TAREFA** identificada na organização de um objeto **O** em **I**.
- τ (Tau) representa uma técnica ou tipo de **TÉCNICAS** que permitem realizar a tarefa do tipo **T**.

---

[2] Quando falamos de *estudante*, referimo-nos ao sujeito em formação numa *IES*, enquanto que o *aluno* é o sujeito em formação na *IEBa*.

- **θ** (Theta minúsculo) representa um discurso racional (**TECNOLOGIA**) que justifica que a técnica *τ* permite realizar a tarefa do tipo **T**.
- **Θ** (Theta maiúsculo) representa a **TEORIA** que tem a função de justificar e tornar compreensível uma tecnologia **θ**.

As quatro noções: tipo de tarefa [**T**], técnica [τ], tecnologia [θ] e teoria [Θ], descrevem uma organização praxeológica completa [**T**/τ/θ/Θ], que se decompõe, geralmente, em dois blocos no processo ensino e aprendizagem (Figura 3), e permitem a modelação das práticas sociais em geral e das atividades matemáticas em particular.

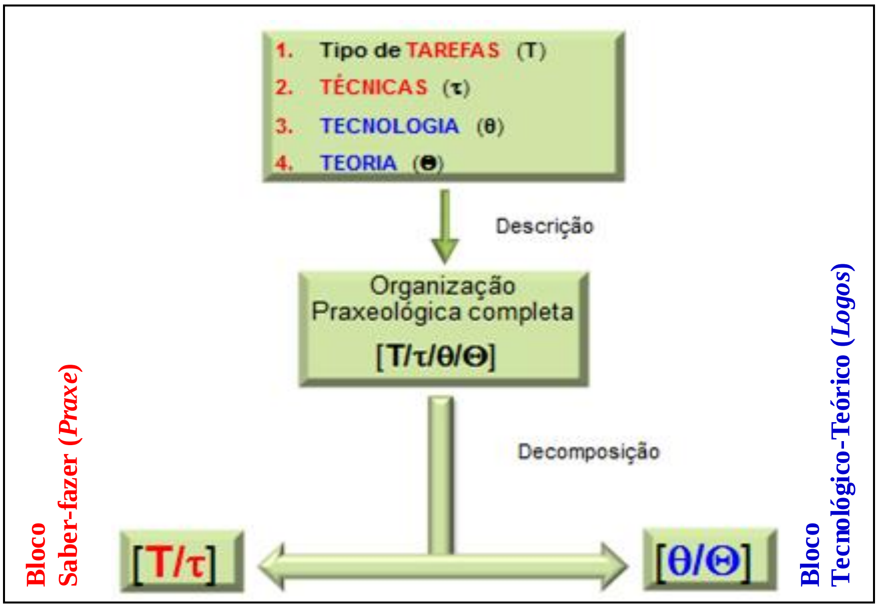


Figura 3: Modelo Praxeológico para análise de ação humana institucional

A noção de *organização praxeológica* e a noção de *relação institucional* proporcionam, a partir de um estudo *ecológico* de saberes (que envolve a análise de livros didáticos e de programas de disciplinas), ferramentas que permitem responder a questões colocadas no contexto institucional. Assim, é importante analisar os documentos oficiais da instituição, como o *PAC*, o *PPP*, os livros e os programas das disciplinas na instituição de *referência*. Tal análise deve ser alimentada pela *ecologia do saber*, questionando sobre o lugar e a função do objeto **O**, a fim de evidenciar o *habitat* e o *nicho ecológico* de **O**.

Na abordagem *ecológica de saberes* (uma das vertentes da *TAD*), Chevallard (1992) define o *habitat* como sendo o lugar de vida e o ambiente conceitual de um objeto do saber. Trata-se, essencialmente, de objetos com os quais interage e também das situações de ensino em que aparecem as manipulações e as experiências associadas. O autor define *nicho ecológico* como o lugar funcional ocupado pelo objeto do saber no sistema, ou *praxeologia* dos objetos, com os quais interage nas instituições. No caso particular das *IM*, interessam-nos saber quais são os *habitats* e *nichos* ocupados pelas *IM* na instituição de referência e suas relações possíveis na instituição de aplicação? A análise institucional permite-nos responder este tipo de questões.

Análise institucional em torno das integrais múltiplas

A escolha que fizemos anteriormente está centrada na apresentação da análise praxeológica das *IM* na instituição de referência. A *UESC* enquanto *IES* oferece dois currículos para a formação em Matemática: Bacharelado e Licenciatura, ambas em vigor desde 1999. O currículo de Licenciatura foi reformulado em 2006. Antes destes cursos, existiam os cursos de Ciências com habilitações em: Biologia, Física, Matemática e Química. Os *PAC* dos cursos de Matemática em vigor apresentam dois fluxogramas[3] distintos. Restringimo-nos aqui ao *PAC* da Licenciatura (*instituição **I** de referência deste trabalho*), onde encontramos as integrais como objetos de estudo do Cálculo Diferencial e Integral (*CDI*), ou simplesmente Cálculo, dividido em três disciplinas que apresentamos na Figura 4 com os respectivos resumos dos ementários. Conforme o fluxograma do curso, a primeira relação **R**(**X,O**) do estudante com esta matéria ocorre no segundo semestre em **I**.

CÁLCULO – I		CÁLCULO – II		CÁLCULO – III
. Funções de uma variável . Limites . Derivadas . Integrais indefinidas	→	. Integrais definidas . Aplicações de integrais . Métodos de integração . Integrais Impróprias . Sequências numéricas . Séries numéricas	→	. Funções de várias variáveis . Limites. Continuidades. . Derivadas parciais aplicações . Integrais Múltiplas (duplas e triples) . Cálculo vetorial

Figura 4 - Distribuição dos conteúdos das disciplinas de Cálculo.

Assim, o *CDI* está presente nos dois primeiros anos do curso de Licenciatura em Matemática e constitui o *habitat* das *IM*. O *PAC* deste curso revela que:

> O Curso de Licenciatura em Matemática visa preparar o profissional que pretende dedicar--se ao ensino de Matemática para atuar na Educação Básica. Além de proporcionar essa formação, o graduando poderá continuar os seus estudos em nível de pós-graduação latu e *strictu sensu*, em Matemática, Educação Matemática ou área a fins, o que lhe permitirá atuar também no magistério superior, bem como contribuir com ações de melhoria na sua prática pedagógica no ensino fundamental e médio (*PAC*, p. 31).

Na preparação do profissional referido pelo *PAC*, as *IM* aparecem como um dos objetos institucionais indispensável. Assim, o estudante em busca da formação em Licenciatura em Matemática na instituição, deve obrigatória e oficialmente, passar pelo o ensino das *IM* em *CDI*. O ensino de integrais encontra, portanto, um lugar natural na organização matemática do *CDI*. Constatamos que após o estudo de funções de uma variável e de integral simples, chega- -se ao estudo das funções de várias variáveis que, entre outros objetos, alimentam o estudo das *IM*. Assim, podemos dizer que:

O primeiro nicho das *Integrais Múltiplas* é o *NICHO DA ANÁLISE MATEMÁTICA*	Caracterizado como *nicho estrutural*, no sentido em que as *IM* vêm completar um programa de estudo, reforçando uma coerência, seguindo um esquema de dois segmentos (estudo de funções de uma variável real e de funções de várias variáveis) e três tempos (definição e limite de funções, cálculo diferencial e cálculo integral).
O segundo nicho das *Integrais Múltiplas* é o *NICHO GEOMÉTRICO*	As *integrais múltiplas* servem o cálculo de *áreas de superfícies* e de *volumes de sólidos*. Neste contexto, as *IM* alimentam-se via gráficos ou superfícies, das técnicas de representação destes objetos, sejam no ambiente *papel/lápis* ou *computacional*, bem como do raciocínio geométrico, ocupando, por conseguinte, um *nicho geométrico* que caracterizamos como *nicho interpretativo*.
O terceiro nicho das *Integrais Múltiplas* é o ***NICHO FÍSICO***	As *integrais múltiplas* servem, também, para calcular massa, momentos de inércia e várias outras noções procedentes à Física. Encontramos aqui as aplicações das *IM* ocupando um *nicho físico* que caracterizamos como *nicho aplicativo*.

Figura 5 – Nichos identificados na *praxeologia das Integrais Múltiplas*.

Neste artigo limitamo-nos ao estudo do segundo tipo de *nicho das IM*. Para compreendermos melhor este *nicho*, analisámos a organização praxeológica das *IM* proposta no livro que escolhemos na instituição de referência.

[3] Disponíveis no link http://www.uesc.br/colegiado_matematica/.

Análise de livro didático

Para realizarmos a análise do *LD*, utilizámos a estrutura organizacional do livro didático (Figura 6) proposta por Henriques, Nagamine, Nagamine (2012, p. 1272).

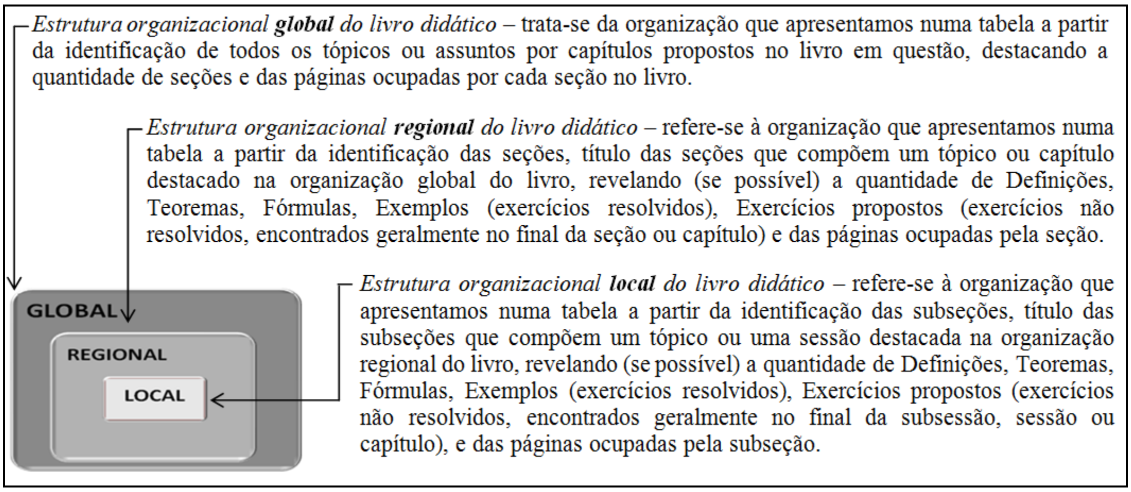


Figura 6 – Estruturas organizacionais do livro didático

Este modelo permite obter uma visão geral dos objetos de estudos propostos no livro didático analisado. Os livros que nos referimos são elementos dos *PAC* mencionados anteriormente, e são frequentemente adotados nesta instituição. Dentre eles, selecionamos os listados no Quadro 2 e concentramo-nos na análise de um deles (SWOKOWSKI, 1994). Esta escolha justifica-se pelo fato de ser o livro mais solicitado pelos estudantes na biblioteca da *instituição de referência*. O Quadro 2 apresenta também as referências completas dos três livros, onde *P/n* indica o lugar ocupado pelas *IM* em cada livro, sendo *P* o número de páginas ocupadas pelas *IM* e *n* o número total de páginas do livro.

Referência do livro **Título, autor, « tradutor » edição, editor, ano de edição**	*P/n*
Cálculo com geometria analítica. SWOKOWSKI, Earl William. Tradução Alfredo Alves de Faria. 2ª ed. Volume 2. São Paulo Makron Books, 1994.	100/763
O Cálculo com Geometria Analítica. LEITHOLD, Louis. Volume II, Editora: HARBRA Ltda, São Paulo, 1994.	109/760
Cálculo. THOMAS, Jorge B. Jr. 11. ed. Americana. São Paulo. Editora Pearson / Addison Wesley. 2009.	77/647

Quadro 2 - Alguns livros de cálculo contendo *integrais múltiplas*.

Os modelos apresentados anteriormente (Figura 3 e Figura 5) serviram de base para a nossa análise. Optámos por apresentar a *estrutura organizacional regional* do livro escolhido considerando o *habitat* e o *nicho* conceitual das *IM*, obtendo assim uma visão geral dos objetos propostos para o seu ensino. Em seguida, analisámos em detalhe, seção após seção, a parte do curso e a das tarefas propostas, as técnicas disponíveis para resolvê-las e as suas justificativas teórico-tecnológicas, considerando, por conseguinte a *estrutura organizacional local*. O objetivo é: evidenciar os *tipos de tarefas* (**T**) das *IM* propostos aos estudantes na instituição I; identificar os tipos de registros de representação predominantes nesta organização; investigar como as tecnologias de ambientes computacionais de aprendizagem intervêm no estudo das *IM* e identificar as relações possíveis dos objetos de estudo das *IM* com conteúdos matemáticos das *IEBa*.

Organização regional do livro didático

Esta organização permite evidenciar os objetos de estudo tratados num determinado capítulo do livro em análise. No caso em questão, a Tabela 1 apresenta a organização correspondente ao capítulo 17 do livro de Swokowski (1994), que trata do estudo das *IM* (Duplas e Triplas). Cada seção corresponde a uma *estrutura organizacional local*. Nela é notável que os exercícios (Exo) não resolvidos, que vêm no final de cada seção, estão agrupados por pacotes (Pq) que denotamos por $T[t_j, t_k]$, com $j \le k$; $j,k \in \mathbb{N}^*$, e corresponde a um tipo de *tarefa* **T** proposto.

Tabela 1 - Estrutura organizacional regional (capítulo 17) do livro Swokowski

Seção	Título da seção	Def	Teo	Cor	For	Ex	Exo	Pq	P
17.1	Integrais duplas	06	02	-	-	07	54	09	11
17.2	Área e volume	02	02	-	-	04	34	08	09
17.3	Integrais duplas em coord. Polares	-	02	-	01	05	34	06	07
17.4	Área de uma superfície	01	-	-	01	02	16	04	03
17.5	Integrais triplas	04	03	-	-	07	36	09	11
17.6	Momentos e centros de massa	04	01	-	-	07	32	10	08
17.7	Coordenadas cilíndricas	-	02	-	-	06	40	05	08
17.8	Coordenadas esféricas	-	02	-	-	06	42	07	06
17.9	Mudança de variáveis e jacobianos	02	02	01	01	06	38	08	12
17.10	Exercícios de revisão						53	14	02
Total		**17**	**16**	**01**	**03**	**50**	**378**	**78**	**77**

Def = Definições, **Teo** = Teoremas, **Cor** = Corolários, **For** = Fórmulas, **Ex** = Exemplos, **Exo** = Exercícios, **Pq** = Pacotes, **P**=Pagina.

Em função da amplitude específica de cada sessão, restringimo-nos à *análise local* da seção 17.1, apresentando porém os resultados globais da *análise regional* deste capítulo.

Análise local do livro didático: o caso das integrais duplas no livro de Swokowski

Como podemos observar na Tabela 2, o *habitat* das *IM* no livro de Swokowski é composto por 6 definições, 2 teoremas, 7 exemplos, 54 exercícios agrupados em 9 pacotes organizado em 11 páginas.

Tabela 2 - Estrutura organizacional local (capítulo 17, seção 17.1) do livro Swokowski

Seção	Título da seção	Def	Teo	Cor	For	Ex	Exo	Pq	P
17.1	Integrais duplas	06	02	-	-	07	54	09	11

Para introduzir o ensino de *integrais duplas* definidas em regiões *R* do plano-*xy*, o autor faz uma analogia formal com o estudo de *integrais simples*, considerando os quatro passosseguintes:

1. Particionar [a, b] escolhendo $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.
2. Para cada k, escolher um número w_k no subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$.
3. Formar a soma de Riemann $\Sigma_k f(w_k)\Delta x_k$, com $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.
4. Se $\|P\|$ é a norma da partição (o maior Δx_k), então $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|d\|\to 0} \sum_k f(w_k)\Delta x_k$.

   Se f é não-negativa em [a, b], então a soma de Riemann do passo 3 é uma soma de áreas de retângulos de alturas associadas ao valor funcional de w_k no subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Essa soma tende para a área da região sob o gráfico da f em [a, b].
   (**SWOKOWSKI**, 1994, p. 460).

No caso das *integrais duplas*, o primeiro passo corresponde a particionar a região *R* de integração. Assim, referindo-se a um capítulo anterior (6.1) dessa obra, o autor limita-se à subdivisão da região *R* num número finito de sub-regiões, doravante denominadas regiões do tipo R_x ou R_y, obtidas por meio de uma rede de retas paralelas aos eixos coordenados, descritas assim (SWOKOWSKI, 1994):

> R_x designa uma região compreendida entre duas curvas de equações $y=g_1(x)$ e $y=g_2(x)$, tal que $g_1(x) \le g_2(x)$ para todo x em $[a, b]$, onde a e b são os extremos da abscissa do ponto (x, y) da região.

> R_y designa uma região compreendida entre duas curvas de equações $x=h_1(y)$ e $x=h_2(y)$, tal que $h_1(y)\leq h_2(y)$ para todo y em $[c, d]$, onde c e d são os extremos da ordenada do ponto (x,y) da região.

Estas descrições revelam a presença do registro na linguagem materna intercalada com registros algébricos. Além destes registros, as descrições acima são acompanhadas de ilustrações geométricas no registro gráfico e que podemos representar analiticamente (cf. Quadro 3).

$R_x=\{(x,y)\in R^2 \mid a\leq x\leq b, g_1(x)\leq y\leq g_2(x)\}$	$R_y=\{(x,y)\in R^2 \mid h_1(y)\leq x\leq h_2(y), c\leq y\leq d\}$
onde g_1 e g_2 são funções de uma variável contínuas no intervalo fechado $[a, b]$ de variação de x, sendo a e b números reais.	onde $x=h_1(y)$ e $x=h_2(y)$ são equações de curvas contínuas no intervalo fechado $[c, d]$ de variação de y, sendo a e b números reais.

Quadro 3 (a): regiões do tipo R_x **Quadro 3. (b):** regiões do tipo R_y

Na partição da região R, o conjunto de retângulos, ditos elementos de áreas, interiores a R constitui uma partição interior P de R, que o autor denota por $\{R_k\}$. O comprimento da maior diagonal de todas as R_k, o autor chama de *norma da partição* de R e denota por $\|P\|$. Além disso, a área de cada sub-região R_k é denotada por ΔA_k.

Com estas denotações, o autor apresenta formalmente o que é uma soma de *Riemann* de funções de duas variáveis conforme a definição (17.1). O conceito de integral de uma função vai, por conseguinte, confrontar-se com o da existência de soma de *Riemann.* Com efeito, as noções de integrabilidade, suas condições e suas propriedades são inquestionáveis no sentido amplo de funções. Questiona-se, contudo, sobre o limite da soma de *Riemann* quando a norma da partição tende para 0. O autor admite que, se uma função é contínua na região R, o limite existe e recorda a definição clássica em (ε,δ) (Epson e Delta) (definição 17.2). Em seguida, enuncia a definição da *integral dupla* de f sobre R que reproduzimos como segue:

> Seja f uma função de duas variáveis definida em uma região R. A integral dupla de f sobre R, denotada por $\iint_R f(x,y)dA$ é
>
> $$\iint_R f(x,y)dx=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_k f(x_k,y_k)dA_k$$
>
> desde que o limite exista.

O autor admite que apenas as funções contínuas sobre regiões limitadas são utilizadas na organização matemática deste objeto do saber, sem a necessidade de verificar se são efetivamente. A questão da existência da integral é afastada totalmente do *topos* do Professor. Ela não é colocada em cheque, nem nos exemplos e muito menos nas *tarefas* propostas. Além disso, a generalização de integrais para domínios ilimitados não está prevista na organização.

Após a apresentação da definição formal, o autor estabelecer a relação entre o *volume de um sólido* e o *cálculo de uma integral dupla,* enfatizando que "*as somas de Riemann* e a *integral dupla* gozam de uma interpretação geométrica útil", limitando-se ao caso em que f é uma função contínua e positiva em R. Para este caso, o autor denota por S o gráfico de f e por Q o sólido limitado por S, pelo plano-*xy* e pela superfície cilíndrica paralela ao eixo-z e de base R, conforme ilustra a Figura 7 (Swokowski 1994, p. 463). Constatámos, aí, a existência de *gráficos de funções* de duas variáveis interagindo no espaço com *superfícies de equações* conhecidas, a fim de formar o contorno do sólido fechado Q[4].

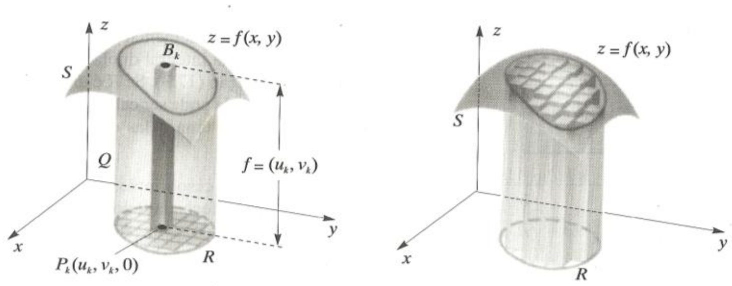


Figura 7 - Figuras 17.4 e 17.5 em Swokowski (1994, p. 463)

O produto $f(x_k, y_k)\Delta A_k$ corresponde ao volume do prisma de base retangular de área ΔA_k e de altura $f(x_k, y_k)$ (Figura 7 à esquerda). A soma dos volumes de todos os prismas (Figura 7 à direita) é uma aproximação do volume de Q. Esta aproximação melhora quando $\|P\|$ tende para 0. Logo, o volume V é definido pelo limite da soma de todos os produtos $f(x_k, y_k)\Delta A_k$, quando $\|P\|$ tende para 0. Assim, o autor fornece a seguinte definição em concordância com a definição anterior (Swokoski, 19994, p.463).

> Seja f uma função contínua de duas variáveis, tal que $f(x, y)\geq 0$ para todo (x, y) em uma região R. O volume V do sólido compreendido entre o gráfico de $z = f(x,y)$ e acima de R é
>
> $$V=\iint_R f(x, y)dA$$

Em seguida, encontramos a seguinte informação: "*com exceção de casos elementares, é virtualmente impossível achar o valor de uma integral dupla $\iint_R f(x, y)dA$ diretamente a partir da definição (17.3)*". Entretanto, se R é uma região do tipo R_x ou R_y, a *integral dupla* pode ser calculada por meio de duas integrais sucessivas. O autor começa por considerar o caso mais simples, em que R é um retângulo, chegando à definição (17.6), que na realidade consiste no *Teorema de Fubini* não enunciado como tal:

Def.17.6

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)dy \right] dx \qquad (1)$$

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)dA = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)dx \right] dy \qquad (2)$$

O resultado é ilustrado com dois exemplos que vêm "validar" o resultado precedente. Estes exemplos apresentam, na verdade, a mesma integral, colocando-se em evidência a inversão de ordem de integração (*Teorema de Fubini*).

Encontramos aí a primeira técnica τ de integração que denotamos por $\tau 1$ e que permite realizar um tipo de *tarefa* de *integrais duplas,* que denotamos por *T1*, correspondente ao gênero *calcular,* a saber:

T1	Dada uma região retangular R do plano xy e uma função de duas variáveis, calcular a integral dupla sobre R.

Este tipo de *tarefa* é realizado utilizando-se a técnica $\tau 1$. Notar que, em geral, neste caso, o domínio de integração e a função a integrar são fornecidos. A ação do estudante consiste apenas na execução dos cálculos, passando pela realização das seguintes subtarefas: *escolher a ordem de*

[4] Esta interação constitui um novo tipo de *tarefa* para o estudante, uma vez que no ensino que precede as *IM* estuda-se uma função em cada *tarefa*. Esta interação traz novas dificuldades ao estudante, uma vez que a visualização no espaço tridimensional não é uma tarefa fácil. Com efeito, muitos passam a se questionar, sendo futuro Profissional da Educação Básica por que tenho que estudar isso?

integração, estabelecer a integral, calcular as primitivas, aplicar sucessivamente o Teorema Fundamental do Cálculo e realizar o cálculo numérico. Contudo, as duas primeiras subtarefas poderão não fazer parte da tarefa do estudante. É o caso em que a *T1* traz a representação algébrica do cálculo da integral previamente estabelecia. Assim, o efeito *topázio* do estudante é reduzido num mimetismo sobre *tarefas* identificadas na *praxeologia* com *técnicas* colocadas em evidência durante o *Curso*.

Um segundo tipo de *tarefa*, que denominamos por *T2*, demanda duas técnicas τ de integração, que denotamos por $\tau 2$ e $\tau 2'$, é do tipo:

T2	Dada uma região do tipo R_x *ou* R_y, não retangular, do plano *xy* e uma função de duas variáveis, calcular a integral dupla sobre *R*.

A primeira técnica $\tau 2$ corresponde ao Teorema 17.8, cujo registro algébrico da integral é dado por:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \right] dx \qquad (3)$$

ou

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx \right] dy \qquad (4)$$

onde *R* é uma região do tipo R_x ou R_y e *f* é uma função de duas variáveis e contínua em *R*. O tipo de tarefa que requer esta técnica exige mais do estudante na modelagem das situações do que o primeiro tipo. Isto porque no primeiro caso a região *R* é um retângulo e, por conseguinte, as superfícies emanadas das fronteiras de *R* são planas, enquanto que no segundo não são necessariamente planas. Além disso, a possibilidade da inversão da ordem de integração leva à consideração de uma segunda técnica $\tau 2'$, favorecendo a realização de tarefas do mesmo tipo *T2*. Esta possibilidade, consequência do Teorema de *Fubini*.

Constatamos que *T1* e *T2* são dois tipos de *tarefas* sutilmente distintos. As técnicas associadas não são completamente as mesmas. Com efeito, o Teorema de *Fubini* é sempre válido para *T1*, mas nem sempre para *T2*. Basta considerar $g_1(x) = -x$ e $g_2(x) = 4x-x^2$, $\forall x \in [0,5]$. Neste caso, a aplicação da técnica $\tau 2'$ não é direta. Ela passa pela decomposição de *R* em sub-regiões.

Os teoremas correspondentes às técnicas acima são apresentados no livro sem as respectivas demonstrações matemáticas. O autor assegura-se que tais demonstrações são objetos de estudo de textos mais avançados.

Até ao momento, podemos afirmar que a *tecnologia* do cálculo de *integrais duplas em coordenadas cartesianas*, revela duas *técnicas* de referência $\tau 1$, $\tau 2$ e dois tipo de *tarefas T1* e *T2*. Nestas tarefas, observamos que a noção de simetria aparece em grande número, mas não é colocada em evidência na *organização geral* como meio de simplificar o cálculo de *integrais*. Além disso, existe um interesse muito grande da parte do autor em abrir discussões entre diferentes registros de representação, na medida em que quase todas as resoluções de *tarefas*, apresentadas como exemplos, são acompanhadas de um desenho. Além da própria linguagem materna, constatámos a abundância de registros algébricos e analíticos. Contudo, estes últimos, em geral, não aparecem de forma explícita no processo heurístico. Constatámos também que a relação entre *equações* das fronteiras das regiões de integração e as *superfícies* correspondentes não é evidenciada.

De um modo geral, na *organização praxeológica* das *IM*, aparece com grande frequência um tipo de *tarefa* que alimenta o nicho predominante: o *nicho geométrico*. Trata-se de *uma tarefa emblemática*:

> *Calcular o volume de um sólido delimitado por superfícies de equações conhecidas.*
> **ou**
> *Calcular a integral da função dada sobre a região delimitada pelas curvas de equações conhecidas.*

Para este tipo de *tarefa*, a maioria dos problemas resolvidos vem acompanhada, no início da resolução, por uma representação *gráfica da função* e/ou de *superfícies das equações* fornecidas. Estas representações são feitas num ambiente computacional, sem que sejam explicadas as maneiras como foram realizadas. Todavia, o autor espera um uso importante do *registro gráfico* na modelagem das *Integrais Múltiplas*, caso contrário não recorreria tanto a eles. Em cada situação ou tarefa, tais representações delimitam um espaço tridimensional, que em alguns casos correspondem aos sólidos clássicos propostos nas organizações praxeológicas de Geometria Espacial (GEOESPAÇO) nas instituições da Educação Básica, em especial no 2º ou 3º ano do Ensino Médio. Estas representações também surgem em disciplinas do fluxograma da instituição de referência, como Geometria Analítica, *CDI II*, Geometria Descritiva e GEOESPAÇO.

Considerando a importância significativa dada aos ambientes computacionais de aprendizagem na organização das *IM*, sem que seja evocada explicitamente, interessa-nos investigar suas intervenções efetivas, enquanto tecnologias no estudo das *IM*. Para isso, analisámos o software *Maple* assim como as representações pertinentes, utilizando as técnicas instrumentais, como o *crivo-geométrico* (HENRIQUES, 2006) na realização dos tipos de tarefas destacadas acima e suas aplicações no 2º ano de Ensino Médio, enquanto instituição de aplicação. Mas, antes de apresentarmos esta análise, convém obtermos uma visão geral sobre o estudo de GEOESPAÇO na instituição de aplicação.

Instituição de aplicação (2º ano de Ensino Médio)

Em função da escolha que fizemos acima, considerámos nesta instituição, o livro didático enquanto *elemento institucional*. Para isso, escolhemos o livro que apresentamos no Quadro 6, utilizado numa escola desta instituição no Município de Itabuna – BA. O Quadro 3 traz também a referência completa do livro, onde *P/n* representa o lugar ocupado pela *GEOESPAÇO* no livro, sendo que *P* indica o número de páginas ocupadas pela *GEOSPAÇO* e *n* o número total de páginas do livro.

Referência do livro **Título, autor, « tradutor » edição, editor, ano de edição**	*P/n*
Matemática aula por aula: ensino médio / Cláudio Xavier da Silva, Benigno Barreto Filho; Ilustradores Alexandre Argozino Neto, Olavo Terónio. – São Paulo: FTD, 2005. Volume 2. Livro do Professor.	100/352

Quadro 3 – Referência do livro utilizado na instituição de aplicação

Por questão de falta de espaço, no caso das *IM*, só apresentámos as estruturas regional e local. Contudo, para a GEOESPAÇO, apresentamos a estrutura organizacional global e regional, mas não a local. Denominaremos, doravante, o livro de referência por MATPROF_2ºMÉDIO.

Organização regional do livro didático

MATPROF_2ºMÉDIO é um livro de Matemática para o Professor que apresenta a seguinte estrutura organizacional global (Tabela 3).

Tabela 3 - Estrutura organizacional global do livro MATPROF_2ºMÉDIO

Capítulo	Título	Seções	P
1	Progressões	3	47
2	Retomando a Estatística	3	20
3	Matriz	6	35
4	Determinantes	8	35
5	Sistemas lineares	5	26
6	Análise combinatória/Binômio de Newton	9	36
7	Probabilidade	5	26
8	**Geometria Espacial**	**11**	**109**
Total			

É notável, nesta estrutura, a percentagem que a GEOESPAÇO ocupa no livro. Além disso, é recorrente nos livros de Matemática das *IEBa*, este objeto de estudo aparecer no final da obra, correndo o risco de não ser contemplado na prática anual do Professor por falta de tempo. Contudo, esta discussão foge ao foco do presente artigo.

Da organização global, destacamos que a GEOESPAÇO contém 11 seções e 109 páginas, cuja estrutura organizacional regional permite evidenciar os objetos de estudo conforme mostra a Tabela 4.

Tabela 4 - Estrutura organizacional regional (capítulo 8) do livro MATPROF_2ºMEDIO

Seção	Título da seção	Exo	P
---	Apresentação	-	03
8.1	Tópicos da geometria plana	53	20
8.2	Postulados	03	05
8.3	Posições relativas de duas retas no espaço	05	06
8.4	Posições relativas de uma reta no plano	04	03
8.5	Posições relativas de dois planos no espaço	06	03
8.6	Prismas	42	12
8.7	Pirâmides	34	10
8.8	Cilindros	22	08
8.9	Cones	14	12
8.10	Esfera	23	07
8.11	Poliedros	30	20
Total		**236**	**109**

Exo = Exercícios, **P**=Pagina.

Cada seção tem uma *estrutura organizacional local* própria. Da mesma forma que na organização do livro de Swokowski (1994), a maioria dos exercícios (Exo) que encontrámos no final de cada seção, é agrupada em pacotes e corresponde a um tipo de *tarefa* **T** proposto ao aluno. No livro do Professor, tais tarefas trazem as respostas. Em função do espaço que nos é reservado para este artigo, não apresentamos aqui as análises locais de cada seção. Contudo, mais adiante, extrairemos uma tarefa proposta numa seção a fim de ilustrar as relações esperadas com as *IM* por mediação do software *Maple*.

Análise do Software Maple relativamente à representação de superfícies 3D

A escolha da análise e utilização do software *Maple* (enquanto instrumento **i**) neste trabalho se justifica pela existência de relações possíveis na *instrumentalização*[5] do mesmo com o objeto **O**

[5] A instrumentalização diz respeito à construção das relações [**i-O**]: o sujeito deve construir os esquemas, os procedimentos e as operações necessárias para a implementação do artefato.

de estudo (*Integrais Múltiplas*). Esta existência favorece a *instrumentação*[6] na relação do sujeito **S** ou **X** da instituição com esse objeto **O** por mediação de **i** (*Maple*). Ou seja, é possível a aprendizagem das ferramentas tecnológicas do instrumento e a análise das relações notáveis no modelo *SAI* [RABARDEL, (1995) & VERILLON, (1996)] em torno da *praxeologia* de **O** (*IM*) (cf. Figura 8).

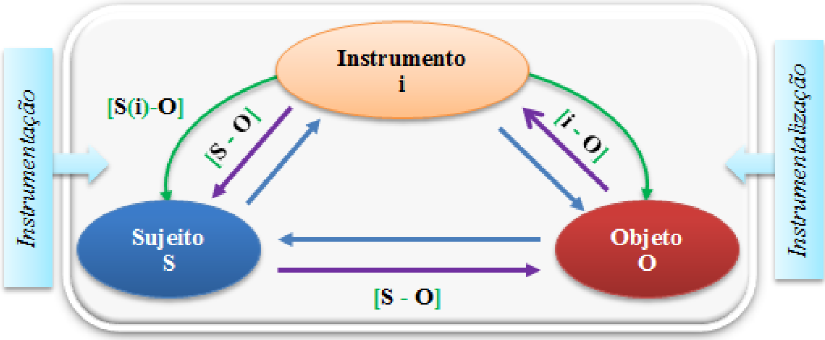


Figura 8: Modelo SAI

Interação ou Relação do:
. *Sujeito-Objeto* [S-O]
. *Sujeito* e o *Instrumento* [S-i]
. *Instrumento* e o Objeto [i-O]
. *Sujeito e Objeto*, pela mediação do *Instrumento* [S(i)-O]

Este modelo ilustra a multiplicidade de relações que podem surgir quando um sujeito **S** interage com o seu objeto **O** de estudo por mediação do instrumento **i**. Para a interação é necessário destacar as potencialidades do software relativamente ao objeto **O** de estudo. Quais são as potencialidades e entraves do *Maple* relativas ao *nicho geométrico*?

Análise das potencialidades e entraves do Maple relativos à representação gráfica em 3D

Para analisar estas potencialidades, visando a *instrumentação* e a *instrumentalização*, utilizamos o método de estudo de relações entre objetos nas práticas de ensino e aprendizagem (Lagrange, 2000). Trata-se de *recensear os objetos ostensivos* e *não-ostensivos*, relativos às práticas *habituais* no ambiente *papel/lápis* e das práticas realizáveis em *ambiente computacional*, destacando as suas relações quando os dois ambientes se entrelaçam nas práticas matemáticas (relação **[S(i)-O]**). No que diz respeitos aos *entraves* do Maple, consideramos a tipologia considerada por Trouche (2000). Trata-se do estudo de *entraves internos*, *de comandos* e de *organização*.

Das análises realizadas, obtivemos os seguintes resultados:

Comandos	Potencialidades	Técnicas	Registros	Entraves
> plot3d **> animate3d** **> cylinderplot** **> implicitplot3d** **> display**	*Oito potencialidades (sintaxes / esquemas de utilização)*	*>Superposição* Mesmo sistema *>Atribuição* Var:= *>Recuperação* %, %%, %%%	*>Escritas lineares* *>Gráfico*	*>Funcional* *>Implícito*

Quadro 4: Resultado do senso do software Maple sobre as representações gráficas em 3D analisadas

Entre os comandos disponíveis, relativos à *Representação Gráfica* em 3D, destacamos as *sintaxes* dos *comandos* que apresentamos no Quadro 4. A análise detalhada destes comandos pode

[6] A *instrumentação* é dimensão da *Gênese Instrumental* que consiste na elaboração da relação [**S-i**]: O sujeito atribui ao instrumento uma possibilidade de agir sobre o objeto **O** e constrói as propriedades funcionais que permitem a realização desta possibilidade de ação.

ser encontrada em Henriques (2006), onde o autor identifica três *técnicas* e oito *potencialidades*. Trata-se, da *gênese instrumental* de sintaxes dos comandos de utilização. Os trabalhos possíveis com estas *potencialidades* permitiram-nos destacar dois tipos de registros diferentes: a *representação linear* [r1] das expressões algébricas e a *visualização gráfica* [r2] dos resultados obtidos pelo Maple.

Identificámos dois tipos de *entraves*:

- *funcional* [e1], relativo à existência e à forma do comando **plot3d** (Quadro 4) segundo a *sintaxe*:

  > plot3d(expref, v1=a..b, v2=c..d, <opções>) (5)

  onde **expref** é a expressão da função considerada, **v1** e **v2** são as variáveis da função, com **v1** variando de **a** até **b** e **v2** variando de **c** até **d**. Os elementos **a**, **b**, **c** e **d** não são necessariamente constantes, porém pelo menos dois referentes a uma mesma variável o são. Se todos forem constantes, então o gráfico de *f* é visualizado sobre uma região retangular. Consequentemente, as superfícies emanadas das fronteiras da região interceptando o gráfico de *f* são planas. Isso corresponde à tarefa do tipo ***T1*** destacada na análise do *LD*. No entanto, a *sintaxe* (5) não permite obter todo tipo de solução que um sujeito é capaz de fornecer com base na praxeologia das *IM*. Aí está o entrave *funcional*.

- *implícito* [e2], ligado à existência e à forma do comando **implicitplot3d** (Quadro 4) segundo a sintaxe:

  > implicitplot3d(eq, v1=a..b, v2=c..d, v3=e..f, <opções>); (6)

  onde **eq** é a equação da superfície considerada, **v1**, **v2** e **v3** são as variáveis da equação, com **v1, v2** e **v3** variando, respectivamente, de **a** até **b**, de **c** até **d** e de e até f. O entrave correspondente está associado à visualização de sólidos, pois a sintaxe (6) não permite obter todo tipo de sólido desejado pelo sujeito, por exemplo um cilindro fechado.

Dentre os comandos relativos ao cálculo das *IM*, destacamos os seis essenciais, que apresentamos no Quadro 5, com quatro *potencialidades* e duas *técnicas* análogas às da *representação gráfica*.

Comandos	Potencialidades	Técnicas	Registros	Entraves
> int **> Int** **> Doubleint** **> Tripleint** **> evalf** **> value**	*Quatro potencialidades (Sintaxes associadas aos esquemas de utilização)*	*>Atribuição* *>Recuperação*	*>Escritas lineares* *>Escritas Espaciais*	*>Caixa Preta*

Quadro 5: Resultados do senso do software Maple sobre cálculo de IM analisadas

Identificamos também dois tipos de registros diferentes e um *entrave* que caracterizamos de *"caixa preta"* associada à existência e formas de comandos de cálculo de integrais iteradas. Desta análise surge uma pergunta: *que relação existe entre os dois domínios* (*RG* e o cálculo das *IM*)? Os estudos subsequentes permitem responder esta questão.

Intervenção do Maple no estudo das *IM* usando a técnica Crivo-Geométrico

Consideremos uma *tarefa* **T** do tipo emblemático, extraída na *praxeologia* das *IM* do livro que analisamos anteriormente, que traz o seguinte enunciado:

> **T**: Calcular a integral da função $f(x,y)=1+x^2+y^2$ sobre a região triangular definida pelos pontos: $(0,0)$; $(0,1)$ e $(\frac{1}{2},0)$.

Esta tarefa é do tipo *T2*, uma vez que a região *R* é um triângulo cuja a fronteira é constituída pelas retas de equações $x=0$, $y=0$ e $y=1-2x$. Estas equações correspondem às superfícies planas emanadas da fronteira de *R*, interceptando o gráfico de *f*. Esta descrição pode ser convertida no registro gráfico com a intervenção do ambiente computacional *Maple*, na relação [**S**(**i**),**O**], uma vez que este oferece possibilidades de estudo das interações entre o *RG* e as *IM*. Isto é devido à estreita relação existente entre a Geometria e a Álgebra, bem como à utilização simples e lógica das sintaxes dos comandos recenseados acima.

Inicialmente, obtivemos a visualização gráfica (r2) a partir das *potencialidades* do comando **plot3d,** segundo a sintaxe de escritas lineares de superfícies parametrizadas. Isto é:

>plot3d([u(v1,v2),v(v1,v2),w(v1,v2)], v1=a..b, v2=c..d, <opções>): **(7)**

evitando assim os entraves *funcional* (5) e *implícito* (6). As instruções lineares de expressões instrumentais fornecidas ao Maple, utilizando a *potencialidade* (7), o comando **display** e as *técnicas de recuperação*, retornam, no registro gráfico, as superfícies das referidas equações e do gráfico de *f* (cf. Figura 9).

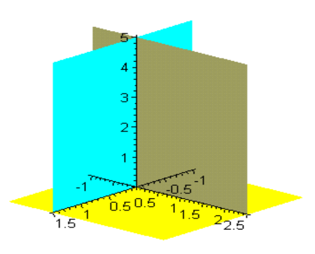
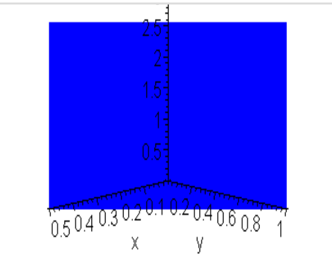
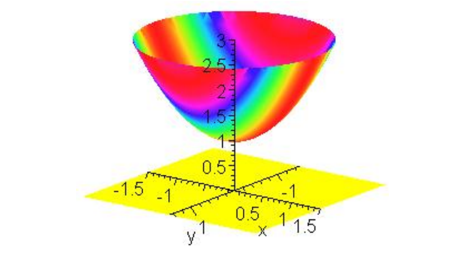
(a) Os planos coordenados	(b) O plano da equação *y*=1-2*x*	(c) O paraboloide de equação $z=1+x^2+y^2$
plot3d([x,0,z],x=-1..1.5, z=0..5, color=cyan): plot3d([0,y,z],y=-1..1.5, z=0..5, color=khaki): plot3d([x,y, 0],x=-1..1.5, y=0..1.5, color=yellow): display(%, %%, %%%);	plot3d([x,1-2*x*, z],x=0..0.5, z=0..5, color=blue):	plot3d([x,y,1+x^2+y^2],x=-1.5..1.5, y=-1.5..1.5, color=cos(y)): plot3d([x,y, 0],x=-1.5..1.5, y=-1.5..1.5, color=yellow): display(%, %%,view=[-1..1,-1..1,0..2])
		

Figura 9: Visualização gráfica de superfícies e de sólido por Crivo-Geométrico

Utilizando novamente o comando **display**, a *técnica de atribuição* e as de *recuperação* é possível reunir (a), (b) e (c) num mesmo sistema de eixos coordenados (cf. Figura 10).

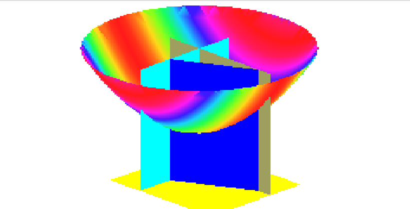
Instruções ou escritas lineares instrumentadas	Interação das superfícies no espaço 3D
y0:=plot3d([x,0,z],x=-1..1.5, z=0..5, color=cyan): x0:=plot3d([0,y,z],y=-1..1.5, z=0..5, color=khaki): z0:=plot3d([x,y, 0],x=-1..1.5, y=-1..5, color=yellow): plot3d([x,1-2*x*, z],x=0..0.5, z=0..5, color=blue): plot3d([x,y,1+x^2+y^2],x=-1.5..1.5, y=-1.5..1.5, color=cos(y)): display(y0,x0,z0,%,%%,view=[-1..1,-1..1,0..2])	

Figura 10: Visualização simultânea das superfícies da **T** no mesmo sistema no cubo [-1,1]x[-1,1]x[0,2]

A princípio esta visualização convence o sujeito que as cinco superfícies têm partes que delimitam um sólido. Portanto, calcular o volume do sólido é um problema pertinente. Assim, o cálculo da integral requerida remete-se ao cálculo do volume do sólido, uma vez que a função *f* assume apenas valores positivos nesta região. Mas, se queremos obter o sólido isolado, enquanto objeto geométrico surge a dificuldade de conservar unicamente as partes das superfícies que o formam. Quais são as técnicas necessárias para se obter a visualização de um sólido isolado? Para Henriques (2006):

> O *Maple* não traça sólidos, mas sim as superfícies que os delimitam. Além disso, não existem no *Maple* sintaxes "prontas" que podem retornar este tipo de sólidos, salvo o desenvolvimento de "**procedures**" específicos, o que foge ao nosso propósito, pois não se trata de uma pesquisa sobre programação.

Questionando-se como proceder para obter os sólidos isolados tal como aparecem repentinamente nos livros didáticos, o autor conjectura que:

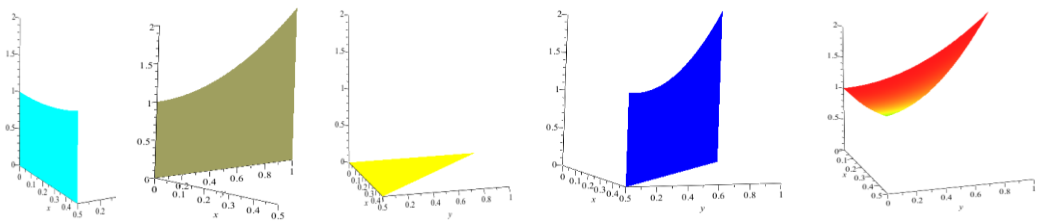
> Para visualizar o sólido isolado é necessário, nas sintaxes de comandos do Maple, entrar com os dados que permitem delimitar as partes das superfícies que formam o contorno do sólido da interseção. A determinação de tais dados é muito próxima do trabalho necessário na pesquisa dos limites da integração. Assim, o trabalho necessário para obter uma RG de um sólido isolado com Maple é uma ajuda importante na modelização de cálculos de Integrais Múltiplas, em particular, no cálculo de volumes. (Op. Citado, p. 214)

Essa ideia levou o autor a propor a *técnica instrumental* batizada de *Crivo-Geométrico*:

> Conservação única de partes de superfícies reunidas que formam o contorno do sólido enquanto objeto geométrico fechado. (Op. Citado, p. 215)

O objetivo explícito desta técnica é obter uma visualização do sólido isolado, doravante designado por *Crivo*, no *registro gráfico*, descrito por um número finito superfícies. Além disso, ela tem uma importância particular na *conversão* de registros e na consolidação da *coordenação* entre os registros *gráfico*, *analítico* e *algébrico da integral*.

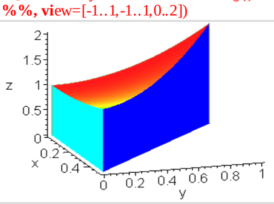
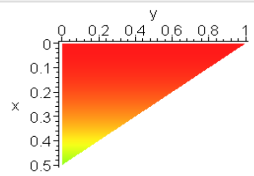
A descrição do crivo, na tarefa em questão, permite obter as expressões instrumentais que retornam as partes das superfícies (Figura 11) que formam o contorno do mesmo.



plot3d([x,0,z],x=0..0.5, z=0..1+x^2, color=cyan): | plot3d([0,y,z],y=0..1, z=0..1+y^2, color=khaki): | plot3d([x,y, 0],x=0..0.5, y=0..1-2*x, color=yellow): | plot3d([x,1-2x, z],x=0..0.5, z=0..1+x^2+(1-2*x)^2, color=blue): | plot3d([x,y,1+x^2+y^2] ,x=0..0.5, y=0..1-2*x, color=cos(y)):

Figura 11: Visualização das partes de superfícies da T que delimitam o sólido crivado.

Utilizando o **display** e a *técnica de recuperação*, visualizamos o sólido crivado (Figura 12a).

<table>
<tr><th>(a) O sólido Q isolado por crivo</th><th>(b) A região R, projeção de Q sobre o plano-xy</th></tr>
<tr><td>(i1) y0:=plot3d([x,0,z],x=0..0.5, z=0..1+x^2, color=cyan):
(i2) x0:=plot3d([0,y,z],y=0..1, z=0..1+y^2, color=khaki):
(i3) z0:=plot3d([x,y, 0],x=0..0.5, y=0..1-2*x, color=yellow):
(i4) plot3d([x,1-2x, z],x=0..0.5, z=0..1+x^2+(1-2*x)^2, color=blue):
(i5) plot3d([x,y,1+x^2+y^2] ,x=0..0.5, y=0..1-2*x, color=cos(y)):
(i6) display(y0,x0,z0,%, %%, view=[-1..1,-1..1,0..2])</td><td>Manipulação direita do sólido crivado</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Figura 12: Sólido crivado e sua projeção no plano-xy</td></tr>
</table>

A partir das instruções **(i1)**, **(i2)**, **...**, **(i6)** na descrição do crivo, é possível notar que: $0 \le x \le 0.5$; $0 \le y \le 1-2x$ e $0 \le z \le 1+x^2+y^2$. Assim, representamos o sólido crivado *analiticamente* por:

$$Q = \{(x, y, z) \in R^3 | \, 0 \le x \le 0.5, \; 0 \le y \le 1\text{-}2x, \; 0 \le z \le 1 + x^2 + y^2\} \qquad \textbf{(8)}$$

Este registro analítico é, tradicionalmente, menosprezado na organização das *IM*, onde é manipulado de forma implícita nas praticas institucionais realizadas nesta organização. Ora, com a representação *Q* disponível, podemos estabelecer a integral:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^{1-2x} (1 + x^2 + y^2) dy \right] dx \qquad \textbf{(9)}$$

que corresponde ao cálculo do volume do *Crivo Q*. Os cálculos devem conduzir ao resultado $V_Q = \dfrac{29}{96}$ unidades de volume. É interessante sublinharmos aqui que, o trabalho realizado para a obtenção do C*rivo* e do seu volume, revela técnicas que podem ser utilizadas no cálculo do volume de qualquer sólido delimitado por superfícies mesmo de equações conhecidas não conhecidas, tal como previsto na praxeologia da GEOESPAÇO, como veremos a seguir.

GEOEPAÇO do MATPROF_2ºMÉDIO x INTEGRAIS MÚLTIPLAS

Considerámos duas *tarefas* extraídas da *organização praxeológica* de *GEOESPAÇO*. A primeira da *estrutura organizacional local* (8.8) (Tabela 4), traz o seguinte enunciado:

> **T$_C$**: Determine o volume de um cilindro cujo raio da base 2 cm e cuja a altura mede 7 cm. (MATPROF_2ºMÉDIO, p. 303, exercício 134)

A *tarefa* T$_C$ é equivalente às do tipo *T2* destacada na *praxeologia* das *IM*. Pelas exigências institucionais e pelo contrato didático, a sua realização por um estudante passa pela aplicação da técnica $\tau 2$, uma vez que as bases (inferior e superior) do cilindro são discos circulares com fronteiras representadas pelas curvas de equações $x^2 + y^2 = r_0^2$, tomando o eixo dos *z* como eixo de simetria do cilindro. Estas curvas podem ser parametrizadas por:

$$x = r_0 \cos(t), \quad y = r_0 \text{sen}(t) \qquad \textbf{(10)}$$

Do mesmo modo que no caso de **T1**, esta descrição pode ser convertida para o registro gráfico com a intervenção do ambiente computacional *Maple*, na relação [**S**(**i**),**O**]. Ou seja, podemos obter a visualização do cilindro em questão no registro gráfico utilizando o comando **plot3d,** segundo a sintaxe de escritas lineares de superfícies parametrizadas (**7**).

(i1) plot3d([r.cos(t),r.sin(t),4], r=0..1, t=0.. 2.Pi, color=t);	**(i2) plot3d([r.cos(t),r.sin(t),r], r=0..1, t=0.. 2.Pi, color=blue);**	**(i3) plot3d([r.cos(t),r.sin(t),0], r=0..1, t=0.. 2.Pi, color=r);**	**(i4) display(%, %%, %%%)**

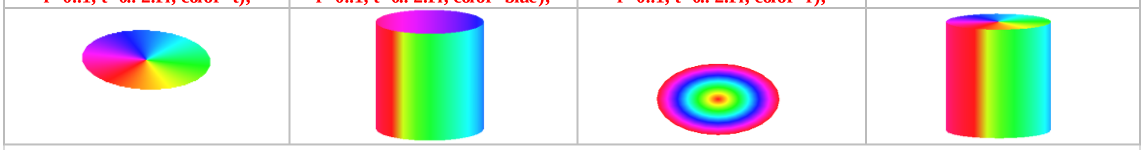


Figura 13: Representação do cilindro crivado

A partir das instruções (**i1**), (**i2**), **...**, (**i6**) na descrição do crivo, é possível notar que: $0 \le r \le r_0$; $0 \le \theta \le 2\pi$ e $0 \le z \le h$, r_0=1 e *h*=4. Assim, representamos o sólido crivado *analiticamente* por:

$$Q = \{(r, \theta, z) \in R^3 | \, 0 \le r \le r_0, \; 0 \le \theta \le 2\pi, \; 0 \le z \le h\}. \qquad \textbf{(11)}$$

Com a representação *Q* disponível, podemos estabelecer a integral:

$$\int_0^{2\pi} \left[\int_0^{r_0} hr dr \right] d\theta \qquad \textbf{(12)}$$

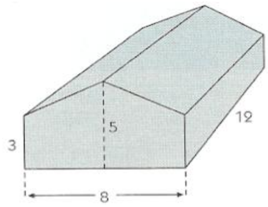
que corresponde ao cálculo do volume do *Crivo Q*. Os cálculos devem conduzir ao resultado $V_Q = \pi r_0^2 h$. Este resultado é encontrado na *praxeologia* de *GEOESPAÇO* de MATPROF 2ºMÉDIO quando o autor escreve:

> *O volume de um cilindro é determinado pelo produto da área da base pela medida da altura:* $V = A_b \cdot h \Rightarrow V = \pi r^2 \cdot h$. (MATPROF_2ºMÉDIO, p. 303, exercício 300)

Para o aluno realizar a tarefa $\mathbf{T_C}$ é suficiente aplicar a fórmula, ou seja, $V_Q = \pi 2^2 \cdot 7 = 28\pi$.

Para concluir, consideramos uma outra *tarefa* proposta na *estrutura organizacional local* (8.6) (Tabela 4), que traz o seguinte enunciado:

> $\mathbf{T_p}$: O volume de ar contido em um galpão com a forma e dimensões dadas pela figura abaixo é: (a) 288; (b) 384; (c) 480; (d)(360) e (e) 768. (MATPROF 2ºMÉDIO, p. 280, exercício 76)



A *tarefa* T_p está relacionada às do tipo *T1* destacados na *praxeologia* das *IM*. A sua realização por um estudante (futuro profissional das *IEBa*) da instituição de referência **I** passa, portanto, pela aplicação da técnica *τ1*. Notamos que o galpão, tem a forma de uma casa com um teto de "duas águas", onde a base tem comprimento 12 uc (unidades de comprimento) e largura 8uc. O ponto mais alto do teto está a uma altura de 5 uc e o mais baixo a 3, em relação à base. Assim, considerando o plano-*yz* como o de simetria do galpão, com uma das faces no plano y=0, e a base do galpão sobre o plano *xy*, podemos destacar os seguintes pontos (4,0,3), (0,0,5). Daí ,temos a reta de equação $z = -x/2+5$ no plano-*xz*. Com isso, temos que uma das "águas do teto" corre sobre o plano de equação $z = -x/2+5$ para $y \in [0,12]$. Por conseguinte, a outra, corre sobre o plano simétrico a este em relação ao plano-*yz*. Isto é: z=*x*/2+5. Além disso, destacamos os planos de equações: *x* = 4, $x = -4$, *y* = 0 e y=12 que representam as paredes e $z = 0$ o piso. Do mesmo modo que na *tarefa* Tc, esta descrição pode ser convertida para o registro gráfico com a intervenção do ambiente computacional *Maple*, na relação [S(i),O]. Ou seja, podemos obter a visualização do galpão em questão no registro gráfico utilizando o comando **plot3d** na sua *sintaxe* de superfícies parametrizadas (7).

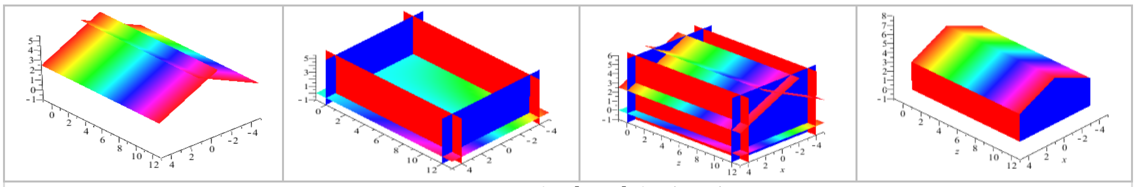


Figura 14: Representação do galpão (casa) por crivo

A partir das instruções implementadas mediante a descrição do crivo, destacamos as inequações: $0 \le x \le 4$; $0 \le y \le 12$ e $0 \le z \le -x/2+5$, r=1 e *h*=4, no primeiro quadrante. Com isto, representamos o sólido (galpão) *Crivado analiticamente* por:

$$\begin{aligned} &Q = Q_1 \cup Q_2, \text{ onde} \\ &Q_1 = \{(x,y,z) \in R^3 \mid 0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 12,\ 0 \le z \le -x/2+5\} \\ &Q_2 = \{(x,y,z) \in R^3 \mid -4 \le x \le 0,\ 0 \le y \le 12,\ 0 \le z \le x/2+5\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Com a representação *Q* disponível, podemos estabelecer a integral por simetria de *Q*:

$$2\int_0^{12}\left[\int_0^4(-x/2+5)dx\right]dy \text{ ou } \int_0^{12}\left[\int_0^4(10-x)dx\right]dy \quad \textbf{(14)}$$

que corresponde ao cálculo do volume *Crivo Q* (galpão). Os cálculos devem conduzir ao resultado $V_Q = 384$. No livro do Professor a solução corresponde ao item (b). Para o aluno realizar a tarefa $\mathbf{T_p}$ é suficiente aplicar a fórmula do cálculo do volume de um Prisma (*área da base vezes a altura*).

Conclusão

O estudo das relações possíveis entre os conteúdos/conhecimentos desenvolvidos em diferentes instituições é uma prática de fundamental importância em pesquisas educacionais. Neste artigo, considerámos duas *instituições*: o curso de *Licenciatura em Matemática da UESC*, como *instituição de referência*, e o *2º Ano do Ensino Médio*, como *instituição de aplicação*. Buscámos respostas para os questionamentos: que conteúdos das *IEBa* podem ser trabalhados neste curso visando as relações possíveis com as *IM*? Como essas relações ocorrem? Como é que as tecnologias permitem instrumentalizar essas relações e com que registros? A análise institucional, restrita à análise de livros didáticos, permitiu responder à primeira questão. A ocorrência das relações é notável no tipo de *tarefas* propostas nas *praxeologias* dos objetos de estudos (*IM* e *GEOESPAÇO*) considerados, onde a intervenção do software como Maple potencializa as relações entre os registros de representações, em especial *algébricos, analíticos e gráficos*. Assim, julgamos essencial disseminar este tipo de análise na formação de futuros Professores das instituições da Educação Básica em formação nas Licenciaturas em Matemática.

Referências

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. Recherches en Didactique des Mathématiques, V. 12, n°1, p. 73-112. 1992

CHEVALLARD Y., L’analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherche en Didactique des Mathématiques, V. 19/2, p. 221-266. 1999.

DUVAL R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de didactique et de sciences cognitives. IREM de Strasbourg, v. 5, p. 35-65. 1993.

HENRIQUES, A. L’enseignement et l’apprentissage des intégrales multiples: analyse didactique intégrant l’usage du logiciel Maple. UJF-Grenoble, Lab. Leibniz. 2006. Disponível em: http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00100353/en/

HENRIQUES, A.; Nagamine, A.; Nagamine, C. M. L. Reflexões Sobre Análise Institucional: o caso do ensino e aprendizagem de integrais múltiplas. BOLEMA, Rio Claro (SP), v. 26, n. 44, dez. 2012.

RABARDEL P. Les hommes et les technologies - Approche cognitive des instruments contemporains, Editions Armand Colin. 1995.