PARA QUE SERVEM OS NÚMEROS IRRACIONAIS? UMA PROPOSTA DE INVESTIGAÇÃO EM GEOMETRIA COM O USO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA

Graziele Souza Mózer
Universidade Federal Fluminense
gramozer@yahoo.com.br

Humberto José Bortolossi
Universidade Federal Fluminense
hjbortol@vm.uff.br

Os números irracionais são apresentados aos alunos geralmente no 8º ano do Ensino Fundamental, quando há a necessidade de se ampliar os conjuntos numéricos para abordar certos assuntos tais como: perímetro e área da circunferência, o Teorema de Pitágoras e equações quadráticas. Depois, eles são retomados no 1º ano do Ensino Médio, já que os alunos irão estudar funções reais. Alguns pesquisadores apontam as dificuldades de se ensinar e aprender números irracionais. Um dos erros frequentes entre os alunos está em achar que π *é igual a 3,14 e que* $\sqrt{3}$ *é igual a 1,73. Afinal, ao se calcular perímetros, áreas e volumes, o que geralmente se faz, no final, é substituir* π *e* $\sqrt{3}$ *por suas aproximações mais conhecidas com uma ou duas casas decimais após a vírgula. Enfim, os alunos do Ensino Básico não têm contato com exemplos ou situações que usem o fato de um determinado número ser irracional. Neste trabalho, decorrente de Mózer (2013), procuramos dar um enfoque diferente aos números irracionais: por meio de atividades interativas construídas com o software gratuito GeoGebra, apresentamos várias situações onde algo interessante e não óbvio parece acontecer porque um determinado número é irracional. A interação com o software permite que os alunos formulem uma conjectura que é, a seguir, discutida e demonstrada. Esperamos que esta nova perspectiva que articula números irracionais com problemas em geometria seja útil aos colegas professores e aos alunos de licenciatura em Matemática interessados no ensino e na aprendizagem de números irracionais.*
Palavras-chaves: números irracionais, geoplano, epiciclos, GeoGebra, ensino e aprendizagem da Matemática.

INTRODUÇÃO

Os números irracionais são apresentados aos estudantes bem cedo, geralmente no 8º ano do Ensino Fundamental, quando há a necessidade de ampliar os conjuntos numéricos para abordar certos conteúdos da Matemática: o Teorema de Pitágoras e suas aplicações, o cálculo do perímetro e da área de círculos e soluções de equações quadráticas. O assunto é normalmente retomado no 1º ano do Ensino Médio por conta do estudo das funções reais elementares que fazem parte do currículo deste ano.

Várias pesquisas têm apontado para a dificuldade de se ensinar e aprender esse assunto na escola básica e nos cursos de formação de professores de Matemática: Ferreira e Barros (2012), Pasquini (2007), Pommer (2012), Ripoll (2006), Ripoll (2011), Santos (2007) e Souto (2010). Neste cenário, um erro frequente detectado entre os alunos é o de eles considerarem, por exemplo, que π é igual a 3,14 e que $\sqrt{3}$ é igual a 1,73. Afinal, ao calcularem perímetros, áreas e volumes, o que geralmente se faz, no final, é substituir π e $\sqrt{3}$ por suas aproximações mais conhecidas com uma ou duas casas decimais após a vírgula.

O próprio Simon Newcomb, importante astrônomo e matemático, declarou que:

> Se a razão entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro fosse escrita com 35 casas decimais, isto seria suficiente para determinar toda a circunferência do universo visível com um erro não maior do que o menor comprimento visível no mais potente microscópio.
>
> Simon Newcomb (1882) (tradução nossa)

Como nos diz Havil (2012), nos dias atuais, com o avanço tecnológico, seria necessário aumentar bastante o número de casas decimais de π para que a declaração de Newcomb continuasse sendo válida. Ainda assim, segundo Havil (2012), para a maioria das situações práticas, não são necessárias aproximações de π com muitas casas decimais. O mesmo acontece frenquentemente com outros números irracionais em questões práticas: pode-se substituí-los por uma aproximação sem maiores problemas (Havil (2012) dá exemplos em Música e na construção de caixas acústicas).

Ao invés de relacionar números irracionais com cálculos de perímetros, áreas e volumes ou soluções de equações como costumam fazer muitos livros didáticos, neste trabalho procuramos dar um enfoque diferente aos números irracionais: apresentamos vários exemplos onde algo interessante e não óbvio acontece porque um determinado número é irracional.

Esperamos que esta nova perspectiva que apresentamos aqui, articulando números irracionais com problemas em geometria, seja útil a colegas professores e a alunos de licenciatura em Matemática interessados no ensino e na aprendizagem de números irracionais.

NÚMEROS IRRACIONAIS E GEOPLANOS

O geoplano (*geoboard* em inglês) é uma ferramenta de manipulação para o ensino de geometria inventado pelo matemático e educador egípcio Caleb Gattegno (1911-1988). Ele é constituído por uma placa, geralmente retangular, de madeira ou isopor, com pregos fixados, em torno dos quais se enrolam elásticos coloridos de borracha, o que permite modelar polígonos cujos vértices são representados pelos pregos (Fig. 1).

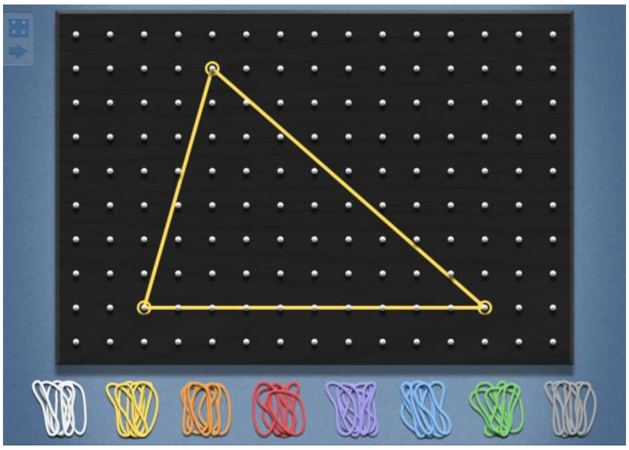


Figura 1: Um geoplano. Fonte: *The Math Learning Center*.

O geoplano tem sido usado no ensino de perímetros, áreas, semelhança e congruência de polígonos, ângulos, transformações geométricas, simetrias e muitos outros assuntos. Entre as atividades clássicas sugeridas para o geoplano está investigar quais são os tipos de triângulos que podem ser construídos com ele. Uma versão virtual desta atividade construída com a ajuda do software GeoGebra (que pode, inclusive ser executada em *tablets*) está disponível em <http://www.geogebratube.org/student/m39903?mobile=true>. Nesta atividade, os vértices do triângulo só podem ocupar posições da forma (i, j), com i e j inteiros. Os alunos devem então tentar construir cada tipo de triângulo indicado na ficha do Anexo I, indicando as coordenadas e os comprimentos dos lados.

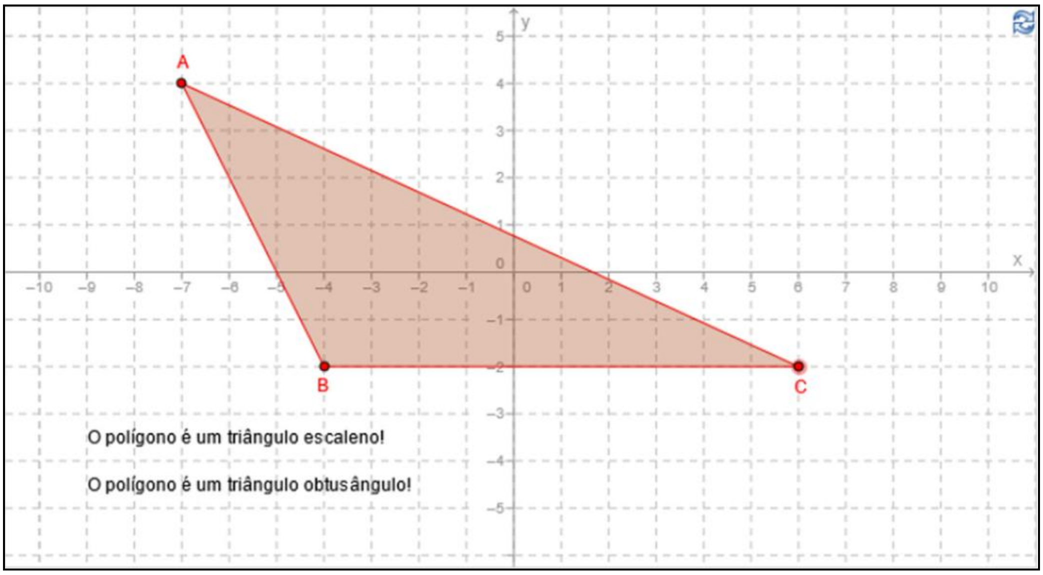


Figura 2: Atividade virtual – classificando triângulos com o GeoGebra.

Observe que nesta atividade o professor pode aproveitar para trabalhar o Teorema de Pitágoras quando os alunos forem calcular as medidas dos lados dos triângulos.

Uma pergunta que surge, no contexto desta atividade, é se é possível construir um triângulo equilátero, justamente a última pergunta da ficha. A ideia é estimular os alunos a fazerem simulações no aplicativo para tentar chegar a uma resposta: eles devem apresentar uma justificativa, caso concluam que não seja possível construir tal triângulo, ou devem explicitar um exemplo, caso conclua o oposto. Como veremos no teorema a seguir, a resposta a esta pergunta é que não é possível construir um triângulo equilátero com vértices de coordenadas inteiras e isto porque $\sqrt{3}$ é um número irracional.

Nossa experiência revelou que, frequentemente, os alunos que afirmam não ser possível construir um triângulo equilátero, justificam sua resposta considerando o caso particular em que a base do suposto triângulo é horizontal (situação esta em que a medida de sua altura é igual a $\ell\sqrt{3}/2$, com ℓ a medida de seu lado). É importante, neste caso, apontar para os alunos que esta justificativa é um caso particular, pois restaria ainda demonstrar a não existência de um triângulo equilátero com todos os três lados não paralelos aos eixos coordenados. Entretanto, caso nenhum aluno consiga uma demonstração para este fato, é interessante e fortemente recomendável que o professor a faça para fechar esta atividade. Aliás, é exatamente neste momento que o aluno terá a oportunidade de apreciar uma situação interessante que ocorre pelo fato de um número ser irracional.

Em nossa opinião, a demonstração que daremos a seguir não é de difícil entendimento para um aluno que esteja terminando o 9º ano do Ensino Fundamental, uma vez que ela requer conhecimentos do Teorema de Pitágoras, do estudo de áreas de retângulos e triângulos e de uma noção da representação geométrica de pares ordenados, que são assuntos abordados neste ano de escolaridade. Basta que o professor faça adaptações na linguagem, se achar necessário, de acordo com a maturidade matemática de seus alunos.

Teorema 1: Não existe em $\mathbb{Z}^2$ triângulo equilátero com vértices com coordenadas inteiras.

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que seja possível construir um triângulo equilátero ABC com coordenadas inteiras: $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$ com x_A, y_A, x_B, y_B, x_C e y_C números inteiros. Sejam ℓ a medida dos lados desse triângulo equilátero, $CDEF$ o retângulo com vértices $D = (x_A, y_C)$, $E = (x_A, y_B)$ e $F = (x_C, y_B)$ e a, b, c, d, e e f as medidas dos segmentos $\overline{CF}$, $\overline{FB}$, $\overline{BE}$, $\overline{EA}$, $\overline{AD}$ e $\overline{DC}$, respectivamente (Fig. 3).

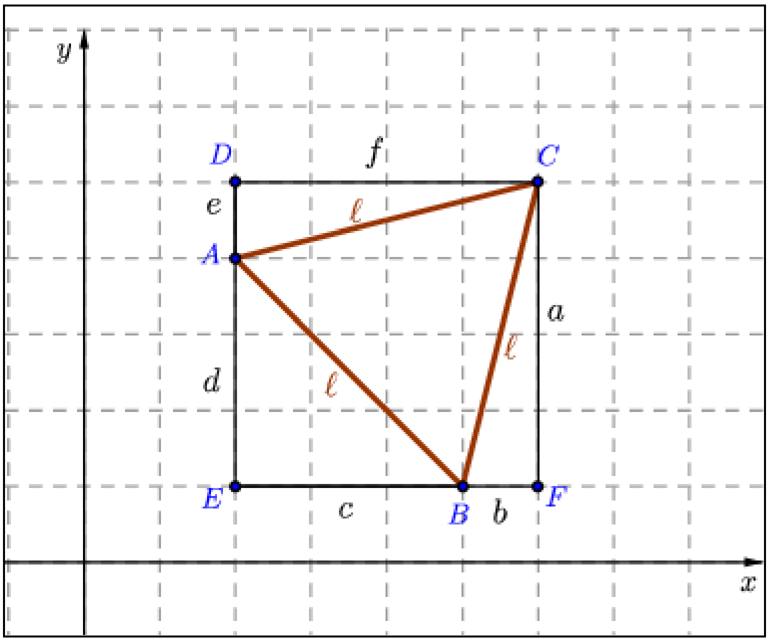


Figura 3: Não existe em $\mathbb{Z}^2$ triângulo equilátero com vértices com coordenadas inteiras – o argumento da área.

Observe que a, b, c, d, e e f são números inteiros por se tratarem de diferenças de números inteiros (isto é, diferenças das coordenadas de A, B, C, D, E e F). Temos também que a área do retângulo $CDEF$ é um número inteiro por tratar-se de um produto de números inteiros (af).

Denotemos por S_{ABC} a área do triângulo ABC.

Observe que:

$$S_{ABC} = S_{CDEF} - (S_{BFC} + S_{AEB} + S_{ADC}) \tag{1}$$

Assim,

$$\ell^2\sqrt{3}/4 = af - \left(ab/2 + cd/2 + ef/2\right), \tag{2}$$

de modo que

$$\ell^2\sqrt{3} = 4af - 2(ab + cd + ef). \tag{3}$$

Note que o lado direito dessa equação é um número inteiro por tratar-se de somas e produtos entre inteiros.

Temos também que ℓ^2 é um número inteiro, uma vez que $\ell^2 = a^2 + b^2$.

Daí, concluímos que $\sqrt{3} = \dfrac{4af - 2(ab + cd + ef)}{\ell^2}$ é um número racional, o que é um absurdo!

Portanto, não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo equilátero com vértices de coordenadas inteiras. □

Observação: Existem outras provas para o teorema anterior usando diferentes técnicas (trigonometria, números complexos, determinantes, vetores, o Teorema de Pick). Todas utilizam o fato de que $\sqrt{3}$ é irracional. Assim, esta atividade pode ser revisitada em outros anos de escolaridade para explorar aplicações de outros assuntos.

NÚMEROS IRRACIONAIS E EPICICLOS

Dizemos que um ponto P descreve um *movimento epicíclico* se sua posição ao longo do tempo pode ser descrita pela combinação de dois movimentos circulares uniformes da seguinte maneira: o ponto P descreve um movimento circular com velocidade angular constante w_2 sobre uma circunferência C_2 (*epiciclo*) de raio $r_2 > 0$ e centro S, e o ponto S, por sua vez, descreve um movimento circular com velocidade angular constante w_1 sobre uma circunferência C_1 (círculo deferente) de raio $r_1 > 0$ e centro em O.

Supondo, sem perda de generalidade, que $O = (0, 0)$ e que, no instante $t = 0$, $S = (r_1, 0)$ e $P = (r_1 + r_2, 0)$, a posição $(x(t), y(t))$ do ponto P, em função do tempo t, é dada por (Fig. 4):

$$\begin{cases} x(t) &= r_1 \cos(w_1 t) + r_2 \cos(w_2 t), \\ y(t) &= r_1 \mathrm{sen}(w_1 t) + r_2 \mathrm{sen}(w_2 t). \end{cases} \tag{4}$$

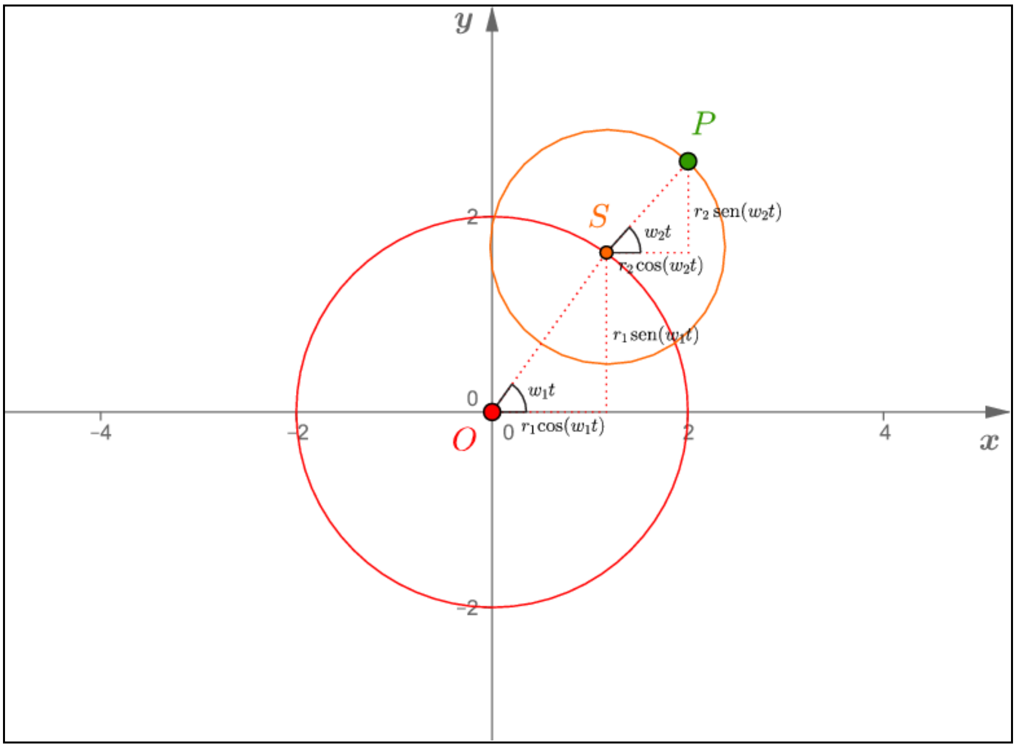
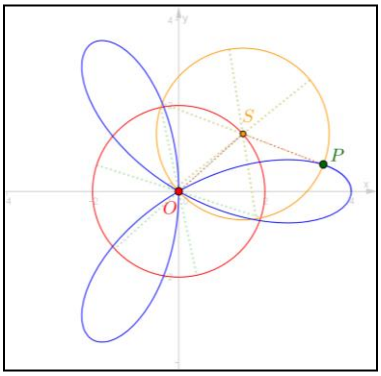
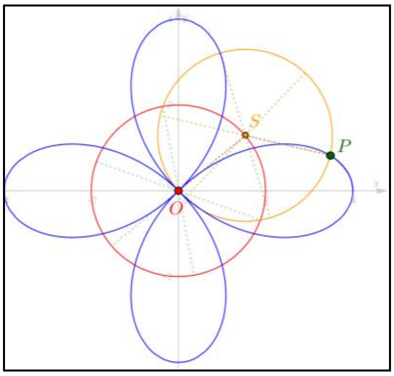


Figura 4: Movimentos epicíclicos.

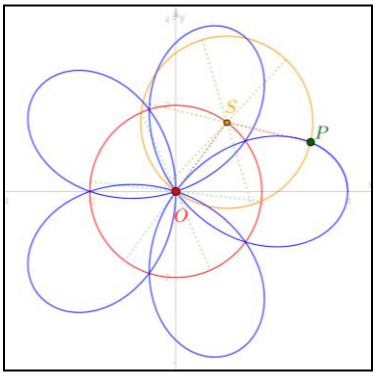
Uma atividade virtual, também construída no GeoGebra, é encontrada em <http://www.geogebratube.org/student/m41370?mobile=true>, onde o aluno pode trocar os valores de r_1, r_2, w_1 e w_2 e ver como funciona um movimento epicíclico. As atividades de [01] a [06] da ficha do Anexo II são oferecidas a fim de ambientar o aluno com o aplicativo e com a ideia dos movimentos epicíclicos. Observe que as equações que definem a posição do ponto P

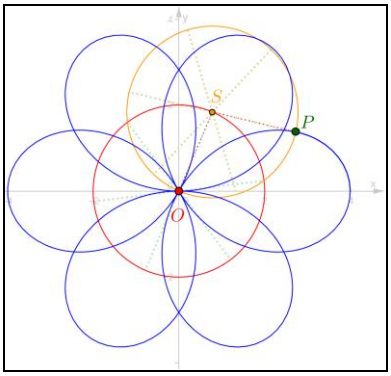
são trigonométricas. Portanto, as atividades propostas oferecem uma ótima oportunidade para fixar os conceitos deste conteúdo. As outras atividades desta mesma ficha falam sobre as *rosáceas*, trajetórias (curvas) formadas pelo ponto P quando $r_1 = r_2$. Assim, os alunos são direcionados a fazer relações entre o valor de $|w_1/w_2|$ e a quantidade de pétalas da rosácea. Na atividade [07] é sugerido que os alunos construam rosáceas na qual $|w_1/w_2|$ seja um número inteiro e com $w_2 < 0$. A atividade leva o aluno a conjecturar que se $|w_1/w_2| = n$, então a rosácea terá $n+ 1$ pétalas (Fig. 5).





$r_1 = 2$; $w_1 = 2$; $r_2 = 2$; $w_2 = –1$; $|w_1/w_2| = 2$ $r_1 = 2$; $w_1 = 3$; $r_2 = 2$; $w_2 = –1$; $|w_1/w_2| = 3$





$r_1 = 2$; $w_1 = 4$; $r_2 = 2$; $w_2 = –1$; $|w_1/w_2| = 4$ $r_1 = 2$; $w_1 = 5$; $r_2 = 2$; $w_2 = –1$; $|w_1/w_2| = 5$

Figura 5: Exemplos de rosáceas.

A atividade [08] trabalha com a situação em que $|w_1/w_2| = 1/n$, onde n é um natural não nulo. E por fim, a atividade [09] trabalha com rosáceas onde $|w_1/w_2| = p/q$, onde p e q são inteiros e primos entre si (q diferente de zero).

Um questionamento que pode surgir ou que o professor pode fazer ao final desta atividade é o seguinte: será que a trajetória sempre “se fecha” como aconteceu em todos os exemplos propostos anteriormente? Aqui, estamos considerando que a trajetória de uma curva $t \mapsto (x(t), y(t))$ “se fecha” se existe pelo menos um $T > 0$ tal que $x(T) = x(0)$ e $y(T) = y(0)$.

A resposta pode ser dada com o teorema abaixo.

Teorema 2: Um movimento epicíclico descreve uma trajetória que se fecha se, e somente se, $w_2 = 0$ ou a razão w_1/w_2 é um número racional, caso $w_2 \neq 0$.

Demonstração:

$(\Rightarrow)$ Suponha que exista $T > 0$ tal que $x(T) = x(0)$ e $y(T) = y(0)$, ou seja,

$$r_1 \cos(w_1 T) + r_2 \cos(w_2 T) = r_1 + r_2 \quad \text{e} \quad r_1 \text{sen}(w_1 T) + r_2 \text{sen}(w_2 T) = 0 . \tag{5}$$

Portanto:

$$\cos(w_1 T) = \frac{r_1 + r_2 - r_2 \cos(w_2 T)}{r_1} \tag{6}$$

E $r_1 \text{sen}(w_1 T) = -r_2 \text{sen}(w_2 T)$. Desta última equação, segue que: $r_1^2 \text{sen}^2(w_1 T) = r_2^2 \text{sen}^2(w_2 T)$, isto é,

$$r_1^2 [1 - \cos^2(w_1 T)] = r_2^2 [1 - \cos^2(w_2 T)]. \tag{7}$$

Escrevendo $a = \cos(w_2 T)$ e substituindo Eq. (6) em Eq. (7), concluímos que

$$r_1^2 \left[1 - \left(\frac{r_1 + r_2 - r_2 a}{r_1} \right)^2 \right] = r_2^2 (1 - a^2) . \tag{8}$$

Logo, $r_1^2 - (r_1^2 + r_2^2 + r_2^2 a^2 + 2 r_1 r_2 - 2 r_1 r_2 a - 2 r_2^2 a) = r_2^2 (1 - a^2)$ e, sendo assim,

$$-2 r_1 r_2 + 2 r_1 r_2 a + 2 r_2^2 a = 2 r_2^2 . \tag{9}$$

Como $r_2 > 0$, dividindo-se os dois lados desta última equação por $2r_2$, vemos que $-r_1 + r_1 a + r_2 a = r_2$ ou, ainda, $r_1(a-1) = -r_2(a-1)$. Como r_1 e r_2 são positivos, segue-se que $r_1 \neq -r_2$ e, desta maneira, obrigatoriamente $a-1$ deve ser igual a zero. Logo, $\cos(w_2 T) = 1$ e, portanto, $w_2 T = 2k\pi$ para algum k inteiro. Se $k = 0$, então $w_2 = 0$, pois $T > 0$. Vamos então assumir que k é diferente de zero. Desta maneira, vemos que $r_1 \text{sen}(w_1 T) + r_2 \text{sen}(2k\pi) = 0$ e, como $\text{sen}(2k\pi) = 0$, segue-se que $r_1 \text{sen}(w_1 T) = 0$, isto é, $\text{sen}(w_1 T) = 0$. Logo, $w_1 T = q\pi$, para algum q inteiro. Assim,

$$w_1 / w_2 = (w_1 T)/(w_2 T) = (q\pi)/(2k\pi) = (q)/(2k) \tag{10}$$

é um número racional.

$(\Leftarrow)$ Suponhamos $w_2 = 0$. Se $w_1 = 0$, então $x(T) = r_1 + r_2 = x(0)$ e $y(T) = 0 + 0 = y(0)$. Mas, se $w_1 \neq 0$, tome $T = 2k\pi / |w_1|$, onde k é um inteiro positivo. Daí:

$$x(T) = r_1 \cos(w_1 T) + r_2 \cos(w_2 T) = r_1 \cos\left(w_1 \frac{2k\pi}{|w_1|} \right) + r_2 \cos(0) =$$

$$= r_1 \cos\left(\frac{w_1}{|w_1|} 2k\pi \right) + r_2 = r_1 + r_2 = x(0) . \tag{11}$$

E

$$y(T) = r_1 \text{sen}(w_1 T) + r_2 \text{sen}(w_2 T) = r_1 \text{sen}\left(w_1 \frac{2k\pi}{|w_1|} \right) + r_2 \text{sen}(0) =$$

$$= r_1 \mathrm{sen}\left(\frac{w_1}{|w_1|} 2k\pi \right) + 0 = 0 + 0 = y(0)\,. \tag{12}$$

Suponha agora que w_1/w_2 seja um número racional tal que $w_1/w_2 = a/b$, com a e b inteiros, sendo b com o mesmo sinal de w_2 e $\mathrm{mdc}(a,b) = 1$ Seja $T = 2bk\pi/w_2$, onde k é um inteiro positivo. Então,

$$x(T) = r_1 \cos(w_1 T) + r_2 \cos(w_2 T) = r_1 \cos\left(w_1 \frac{2bk\pi}{w_2} \right) + r_2 \cos\left(w_2 \frac{2bk\pi}{w_2} \right) =$$

$$= r_1 \cos\left(\frac{w_1}{w_2} 2bk\pi \right) + r_2 \cos(2bk\pi) = r_1 \cos\left(\frac{a}{b} 2bk\pi \right) + r_2 \cos(2bk\pi) =$$

$$= r_1 \cos(2ak\pi) + r_2 \cos(2bk\pi) = r_1 + r_2 = x(0). \tag{13}$$

E,

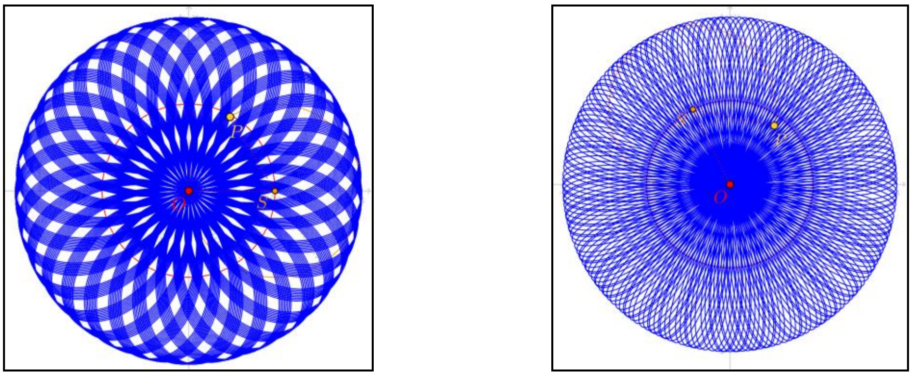
$$y(T) = r_1 \mathrm{sen}(w_1 T) + r_2 \mathrm{sen}(w_2 T) = r_1 \mathrm{sen}\left(w_1 \frac{2bk\pi}{w_2} \right) + r_2 \mathrm{sen}\left(w_2 \frac{2bk\pi}{w_2} \right) =$$

$$= r_1 \mathrm{sen}\left(\frac{w_1}{w_2} 2bk\pi \right) + r_2 \mathrm{sen}(2bk\pi) = r_1 \mathrm{sen}\left(\frac{a}{b} 2bk\pi \right) + r_2 \mathrm{sen}(2bk\pi) =$$

$$= r_1 \mathrm{sen}(2ak\pi) + r_2 \mathrm{sen}(2bk\pi) = 0 + 0 = 0 = x(0). \tag{14}$$

Portanto, existe $T > 0$ tal que $x(T) = x(0)$ e $y(T) = y(0)$. □

Neste momento, o professor pode pedir a seus alunos que testem alguns exemplos em que w_1/w_2 é um número irracional, tais como os descritos na Fig. 6.



$r_1 = 2$; $w_1 = \pi$; $r_2 = 2$; $w_2 = -1$; $|w_1/w_2| = \pi$ $r_1 = 2$; $w_1 = 2$; $r_2 = 2$; $w_2 = -\sqrt{2}$; $|w_1/w_2| = 1/\sqrt{2}$

Figura 6: Exemplos de rosáceas.

Contudo, neste caso, o professor deve ficar atento e alertar seus alunos de que computadores não trabalham numericamente com números irracionais. De fato, quando, por exemplo, digitamos π no GeoGebra como um dos parâmetros, o que o programa faz é substituí-lo por uma aproximação decimal com no máximo 15 casas. Portanto, apesar de termos a impressão na

Fig. 6 de que as trajetórias desenhadas no GeoGebra nunca se fecharão, em algum momento elas se fecharão devido às aproximações. Mas, como nos diz o teorema anterior, se conseguíssemos trabalhar com números irracionais ao invés de aproximações, a curva nunca se fecharia.

Observação: O resultado do Teorema 2 é mais forte. Lembramos que uma trajetória $t \mapsto (x(t), y(t))$ é *periódica* com período $T > 0$ se, para todo $t \in \mathbb{R}$, $x(t+T) = x(t)$ e $y(t+T) = y(t)$. O menor $T > 0$, se existir, tal que $x(t+T) = x(t)$ e $y(t+T) = y(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, é denominado o *período fundamental* da trajetória. É possível demonstrar (Mózer, 2013) que um movimento epicíclico descreve uma trajetória periódica se, e somente se, $w_2 = 0$ ou a razão w_1/w_2 é um número racional, caso $w_2 \neq 0$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Enquanto que as duas atividades propostas aqui exploram manifestações de números racionais que são acessíveis a alunos dos Ensinos Fundamental e Médio, existem outras manifestações mais sofisticadas que requerem conteúdos matemáticos do Ensino Superior: bilhar no quadrado, ladrilhamentos aperiódicos de Penrose, a Função de Dirichlet e curvas do espirógrafo. Detalhes podem ser encontrados em Mózer (2013).

Referências

Mózer, G.S. *Para que Servem Os Números Irracionais? Manifestações em Aritmética, Combinatória e Geometria*. Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal Fluminense, 2013.

Newcomb, S. *Logarithmic and Other Mathematical Tables: With Examples of Their Use and Hints on The Art of Computation*. Henry Holt and Company, 1882.

Pommer, W.M. *A Construção de Significados dos Números Irracionais no Ensino Básico: Uma Proposta de Abordagem Envolvendo Os Eixos Constituintes dos Números Reais*. Tese de Doutorado, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2012.

Ripoll, C.C. *Mal Ditas Frases Encontradas em Livros Didáticos de Matemática para A Escola Básica*. Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2011. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~fundamentos1/Mal_ditas.pdf>. Acesso: 12 fev. 2013.

ANEXO I

[01] Construa um triângulo de cada tipo pedido abaixo, anote abaixo as coordenadas dos vértices e as medidas de cada lado do triângulo.

	Vértices			Lados		
	A	**B**	**C**	**AB**	**AC**	**BC**
Isósceles						
Escaleno						
Acutângulo						
Retângulo						
Obtusângulo						
Isósceles retângulo						
Escaleno retângulo						
Isósceles acutângulo						
Escaleno acutângulo						
Isósceles obtusângulo						
Escaleno obtusângulo						

[02] Você teve dificuldade para construir algum triângulo? Quais?

[03] Existe algum triângulo que você não conseguiu construir? Quais?

[04] Os eixos coordenados o ajudaram a montar algum triângulo? Quais?

[05] É possível montar um triângulo retângulo com uma hipotenusa na horizontal? Em caso afirmativo, dê um exemplo escrevendo as coordenadas dos vértices do triângulo. Em caso negativo, justifique!

[06] É possível montar um triângulo isósceles com uma base não horizontal? Em caso afirmativo, dê um exemplo escrevendo as coordenadas dos vértices do triângulo. Em caso negativo, justifique!

[07] É possível montar um triângulo equilátero com coordenadas inteiras? Em caso afirmativo, dê um exemplo escrevendo as coordenadas dos vértices do triângulo. Em caso negativo, justifique!

ANEXO II

Nos exercícios que se seguem, lembre-se que as coordenadas do ponto amarelo em função do tempo t são dadas por

$$\begin{cases} x(t) & = & r_1 \cos(w_1 t) + r_2 \cos(w_2 t), \\ y(t) & = & r_1 \operatorname{sen}(w_1 t) + r_2 \operatorname{sen}(w_2 t). \end{cases}$$

[01] Considere os valores $r_1 = 2$, $w_1 = 1$, $r_2 = 1$ e $w_2 = 8$. Quais são as coordenadas do ponto amarelo quando $t = \pi/2$? Para conferir sua resposta com o aplicativo da atividade, forneça os dados $r_1 = 2$, $w_1 = 1$, $r_2 = 1$ e $w_2 = 8$ nos campos respectivos (se você estiver usando o aplicativo pela primeira vez, estes já são os dados iniciais), digite **pi/2** no campo de nome "t" e, então, pressione o botão "Atualizar!".

[02] Para cada um dos experimentos indicados na tabela abaixo,

(a) faça uma simulação no aplicativo da atividade (para isto, digite os dados da tabela nos campos do aplicativo e, então, pressione o botão "Animar!)",
(b) elabore uma conjectura sobre a trajetória do ponto amarelo (A curva em azul é um círculo? É uma elipse? É uma parábola? Etc.) e

Experimento	r_1	w_1	r_2	w_2	Trajetória
1	2	0	1	8	
2	2	1	1	0	
3	1	1	1	–1	
4	2	1	1	1	

[03] No Experimento 2 do Exercício [02], o ponto amarelo está girando em torno do centro do epiciclo ou ele está parado com relação a este centro? E no Experimento [04]?

[04] Se $r_1 = 1$, $w_1 = 1$, $r_2 = 1$ e $w_2 = 1$, a trajetória do ponto amarelo é um círculo. Para $t_{min} = 0$ e $t_{max} = 20.0$, o ponto amarelo dá mais de três voltas em torno do centro do deferente. Com $t_{min} = 0$, qual deve ser o valor de t_{max} para que o ponto amarelo dê exatamente uma volta em torno do centro do deferente?

[05] O valor do campo w_1 descreve a velocidade angular com a qual o ponto laranja (centro do epiciclo) se move sobre o deferente. O que acontece com o ponto laranja quando $w_1 = 0$? E quando $w_1 < 0$? E quando $w_1 > 0$? Dica: experimente fazer várias simulações com o aplicativo da atividade usando valores diferentes para w_1!

[06] O valor do campo w_2 descreve a velocidade angular com a qual o ponto amarelo se move sobre o epiciclo. O que acontece com o ponto amarelo quando $w_2 = 0$? E quando $w_2 < 0$? E quando $w_2 > 0$? Dica: experimente fazer várias simulações com o aplicativo da atividade usando valores diferentes para w_2!

[07] **(Rosáceas, Parte 1)** Quando $r_1 = r_2$, a trajetória (curva) que o ponto amarelo descreve recebe o nome de *rosácea*. Neste exercício nos concentraremos no caso em que w_1 e w_2 possuem sinais contrários. Use o aplicativo da atividade para desenhar as rosáceas indicadas na tabela abaixo. Tente identificar um padrão entre os parâmetros w_1 e w_2 e o número de pétalas da rosácea. Dica: para não ter que efetuar a animação em cada experimento, coloque o valor de t igual ao valor de t_{max}, mude os valores de w_1 e w_2 apenas e, então, pressione o botão "Atualizar!".

Experimento	r_1	w_1	r_2	w_2	$\|w_1/ w_2\|$	Número de Pétalas
1	2	2	2	–1	2	
2	2	3	2	–1	3	
3	2	4	2	–1	4	
4	2	5	2	–1	5	
5	2	6	2	–1	6	
6	2	6	2	–2	3	
7	2	6	2	–3	2	

[08] **(Rosáceas, Parte 2)** O que aconteceria se, na tabela do exercício anterior, você trocasse os valores das colunas w_1 e w_2 (de forma que as razões $|w_1/ w_2|$ ficariam iguais a 1/2, 1/3, 1/4, etc.)? O formato da trajetória mudaria? Justifique sua resposta!

[09] **(Rosáceas, Parte 3)** Nos exercícios [07] e [08] as razões $|w_1/ w_2|$ eram da forma n/1 ou 1/n. O objetivo deste exercício é estudar o formato de uma rosácea quando a razão $|w_1/ w_2|$ é um número racional da forma n/d. Use o aplicativo da atividade para desenhar as rosáceas indicadas na tabela abaixo. Tente identificar um padrão entre os parâmetros w_1 e w_2 e o número de pétalas da rosácea. Dica: para não ter que efetuar a animação em cada experimento, coloque o valor de t igual ao valor de t_{max}, mude os valores de w_1 e w_2 apenas e, então, pressione o botão “Atualizar!”. Observação: sqrt(x) = x^(1/2).

Experimento	r_1	w_1	r_2	w_2	$\|w_1/ w_2\|$	Número de Pétalas
1	2	2	2	–3	2/3	
2	2	2	2	–4	2/4 = 1/2	
3	2	2	2	–5	2/5	
4	2	2	2	–6	2/6 = 1/3	
5	2	2	2	–7	2/7	
6	2	2	2	–8	2/8 = 1/4	
7	2	2	2	–9	2/9	
8	2	3	2	–2	3/2	
9	2	3	2	–4	3/4	
10	2	3	2	–5	3/5	
11	2	3	2	–6	3/6 = 1/2	
12	2	3	2	–7	3/7	
13	2	3	2	–8	3/8	
14	2	3	2	–9	3/9 = 1/3	
15	2	8/9	2	–4/3	2/3	
16	2	sqrt(8)	2	–sqrt(18)	2/3	