CONSTRUÇÃO DE CÔNICAS COM SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA

João Calixto Garcia

Escola Cooperativa de Cerquilho / E. E. Pres. Arthur da Silva Bernardes

klixg@yahoo.com.br

O assunto Construções Geométricas mostra-se um belo instrumento para o ensino da Matemática. Constitui-se, por assim dizer, no laboratório da Geometria. Proporciona nessa área uma exploração de qualidade maior, didaticamente falando, e que pode ser potencializada quando se conta com os recursos da computação, por meio dos chamados softwares *de Geometria Dinâmica, sobretudo como expediente para implementação nos currículos do ensino básico. Propomos aqui o uso de tal* software *para construção das cônicas como lugar geométrico, valendo-se de suas definições via foco e diretriz e via distâncias a focos, apresentando algumas situações que envolvem esse processo investigativo.*

Palavras-chaves: Cônicas, Construções Geométricas, Geometria Dinâmica

INTRODUÇÃO

Cada ponto de uma cônica pode ser construído geometricamente, considerando sua definição tanto por foco e diretriz como por distâncias a focos. Ao apresentarmos as construções pela primeira definição, estabelecemos a unidade e as posições do foco e da diretriz, a partir dos quais obtemos ponto a ponto a cônica de excentricidade dada. Pela segunda definição, apresentamos inicialmente as construções clássicas das cônicas, seguidas de construções que derivam dessas. Em ambos os casos, fazemos uso dos recursos da informática em auxílio aos procedimentos de construção, assim como na visualização da dinâmica desta.

CONSTRUINDO E EXPLORANDO CÔNICAS DEFINIDAS VIA FOCO E DIRETRIZ

Definições

Dado o número $e > 0$ e dados um ponto F, uma reta d em um plano, com $F \notin d$, o conjunto de todos os pontos do plano cuja razão das distâncias a d e a F é e é chamado a cônica de excentricidade e, foco F e diretriz d.

Para $e = 1$, a cônica é chamada parábola. Para $0 < e < 1$, elipse, e, para $e > 1$, hipérbole.

Denominamos focal a reta r que contém F e é perpendicular a d. Ponhamos $\{X\} = r \cap d$.

Construção da elipse

Observemos inicialmente que na reta r existem dois pontos A e A' da elipse, como podemos ver na seguinte construção geométrica (Figura 1).

Consideramos uma semirreta com origem em X e direção diferente daquela de r e, nela, marcamos os pontos M, N e N' de modo que o segmento MX tenha comprimento unitário, o segmento NX tenha comprimento $1 + e$ e o segmento $N'X$, $1 – e$. As retas que passam por M e são paralelas a NF e a $N'F$ intersectam a reta r respectivamente nos pontos A e A'. Com a aplicação do Teorema de Tales vê-se que A e A' são pontos da tal elipse. Não é difícil verificar que A e A', que chamamos vértices da elipse, são seus únicos pontos na reta r.

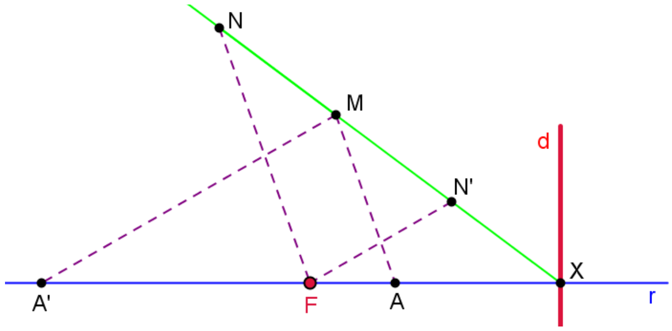

Figura 1: Construção de pontos *A* e *A'* de uma elipse

Vamos construir a elipse a partir dos elementos *F*, *d* e *e* que a define.

No plano, localizamos a diretriz *d* e o foco *F* e traçamos a reta *r* (Figura 2). Consideramos uma circunferência λ centrada em *F* e de raio $AF \leq x \leq A'F$ (a justificativa para essa adoção pode ser encontrada na primeira referência deste artigo). Traçamos, no semiplano determinado pela reta *d* ao qual pertence *F*, a reta *s* à distância $y = \frac{x}{e}$ de *d*. Uma vez criado o segmento de medida unitária, constrói-se o segmento de medida *y*, como indicado na Figura 2. Vê-se claramente que o(s) ponto(s) de intersecção entre a reta *s* e a circunferência λ pertence(m) à elipse em questão. E, ao tomarmos para *x* as medidas *AF* e *A'F*, nessa ordem, os vértices *A* e *A'* são os pontos de tangência de λ com *s*, respectivamente. Com o referido auxílio da informática, podemos visualizar a construção da tal elipse quando variamos *x*. Podemos também alterar sua excentricidade mudando a medida do segmento de comprimento *e*, mantendo-o menor do que 1. E, desde que se tenha $AF \leq x \leq A'F$, podemos deslocar o foco *F* e verificar, com isso, as alterações nessa cônica.

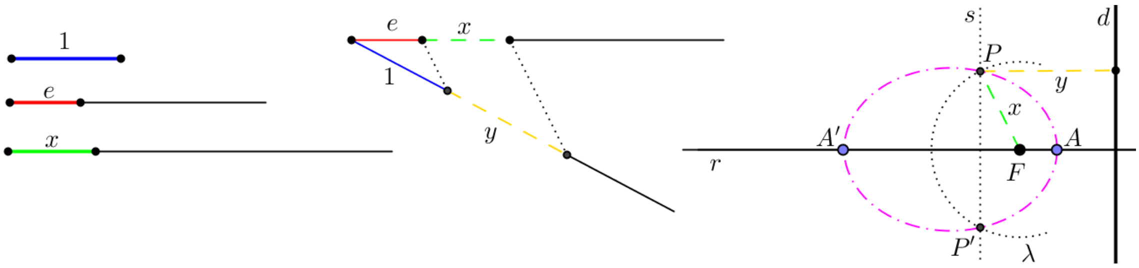

Figura 2: Construção da elipse definida por foco e diretriz

Construção da hipérbole

Observemos primeiramente que, assim como na elipse, na reta *r* existem dois pontos *A* e *A'* da hipérbole em questão, como podemos ver na seguinte construção geométrica (Figura 3).

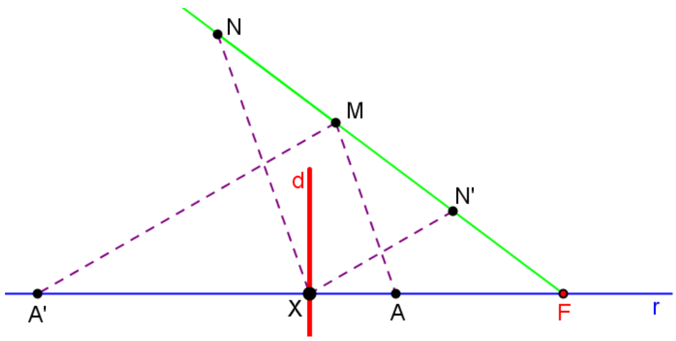

Figura 3: Construção de pontos *A* e *A'* de uma hipérbole

Consideramos uma semirreta com origem em F e direção diferente daquela de r e, nela, marcamos os pontos M, N e N' de modo que o segmento MF tenha comprimento igual a e, o segmento NF tenha comprimento $e + 1$ e o segmento $N'F$, $e - 1$. As retas que passam por M e são paralelas a NX e a $N'X$ intersectam a reta r respectivamente nos pontos A e A'. Com a aplicação do Teorema de Tales vê-se que A e A' são pontos da tal hipérbole. Não é difícil verificar que A e A', que chamamos vértices da hipérbole, são seus únicos pontos na reta r.

Vamos construir a hipérbole a partir dos elementos F, d e e que a define.

No plano, localizamos a diretriz d e o foco F e traçamos a reta r (Figura 4). Consideramos uma circunferência λ centrada em F e de raio $x \geq AF$ (a justificativa para essa adoção pode ser encontrada na primeira referência deste trabalho). Realizamos a construção de pontos da hipérbole de maneira inteiramente análoga à da elipse. Tomando para x a medida AF, vértice A é o ponto de tangência de λ com s.

Não é difícil mostrar que, tomando $x \geq A'F$, a circunferência λ, além de s, intersecta também a reta s', simétrica de s com relação à diretriz d (demonstração na primeira referência deste trabalho). E, se $x = A'F$, vértice A' é o ponto de tangência de λ com s'.

Com o referido auxílio da informática, podemos visualizar a construção da tal hipérbole quando variamos x. Podemos também alterar sua excentricidade mudando a medida do segmento de comprimento e, mantendo-o maior do que 1. E, desde que se tenha $x \geq AF$, podemos deslocar o foco F e verificar, com isso, as alterações nessa cônica.

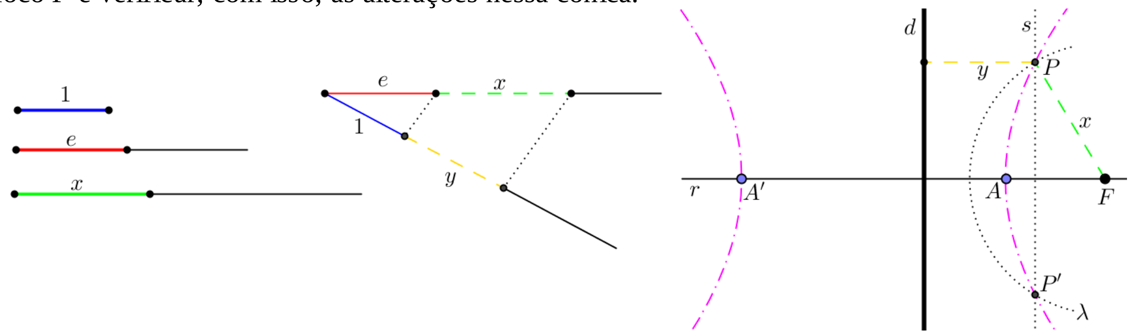

Figura 4: Construção da hipérbole definida por foco e diretriz

Construção da parábola

Vamos construir a parábola a partir dos elementos F e d que a define.

Observemos inicialmente que o único ponto V da parábola pertencente a r é o ponto médio do segmento FX, o que não é de difícil constatação. Chamamos o ponto V de vértice da parábola.

No plano, localizamos a diretriz d e o foco F (Figura 5). Consideramos uma circunferência λ centrada em F e raio $x \geq VF$. Traçamos, no semiplano determinado pela reta d ao qual pertence F, a reta s à distância x de d. Vê-se claramente que o(s) ponto(s) de intersecção entre a reta s e a circunferência λ pertence(m) à parábola em questão. Fazendo uso de um programa de Geometria Dinâmica (G.D.), podemos ter acesso a esse lugar geométrico quando variamos x. Contando ainda com esse recurso, desde que se tenha $x \geq VF$, podemos deslocar o foco F e verificar, com isso, as alterações na parábola. Observemos ainda que o vértice V é o ponto de tangência de λ com s, ao tomarmos $x = VF$.

É oportuna a investigação do quociente $\dfrac{QF}{Qd}$, para um ponto Q arbitrariamente tomado nesse plano. Esse quociente é menor do que 1 para Q na região delimitada pela parábola em que se encontra o seu foco e é maior do que 1 na região complementar. Esse fato nos diz os locais onde habitam, por assim dizer, as elipses e as hipérboles com esse foco e essa diretriz, para cada e, tendo como fronteira a parábola em questão.

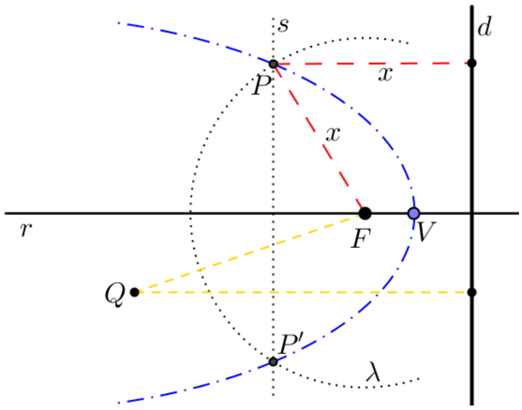

Figura 5: Construção de parábola definida por foco e diretriz

A parábola pode ser vista ainda como coleção de centros de circunferências que passam por F e são tangentes a d, como sugere a construção exibida na Figura 6. Para dado Q em d, o centro P da circunferência tangente a d e que passa por F é a intersecção da mediatriz de FQ com a perpendicular a d por Q. E se F é centro de uma circunferência Λ de raio k, é também parábola o lugar geométrico dos centros de circunferências tangentes a Λ e a d. Nesse caso, não é difícil verificar que cada ponto da parábola de foco F e diretriz $\bar{d}$, como ilustrada na Figura 7, é equidistante de d e de Λ.

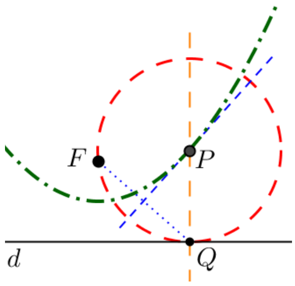

Figura 6: A parábola como conjunto de centros de circunferências

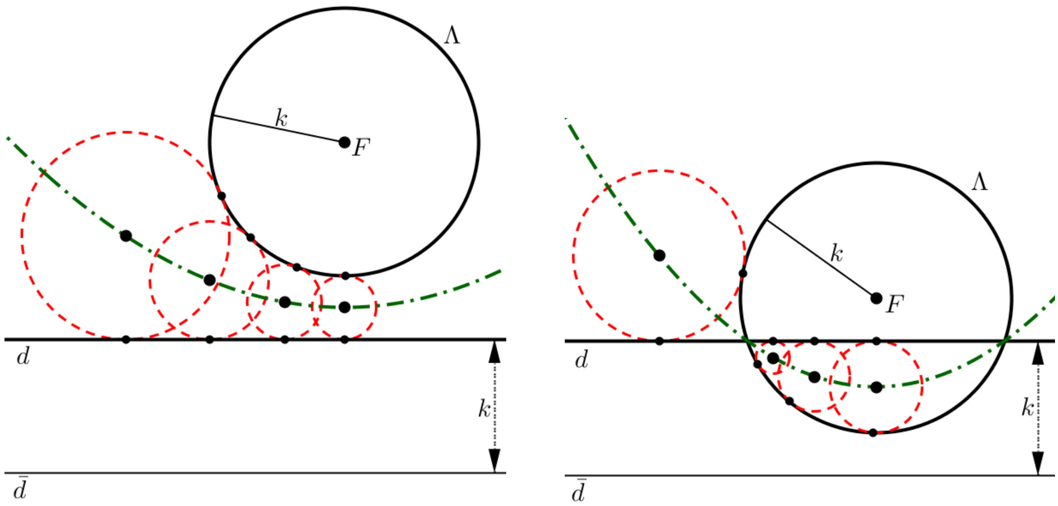

Figura 7: A parábola como conjunto de centros de circunferências, em duas novas situações

Esse estudo motiva caracterizações de elipse e de hipérbole como lugares geométricos também de centros de circunferências. Nas construções associadas a essas caracterizações, empregamos a definição dessas cônicas via distâncias a focos, como veremos a seguir. A equivalência entre essas definições pode ser encontrada em na primeira referência deste texto.

CONSTRUINDO E EXPLORANDO CÔNICAS DEFINIDAS VIA DISTÂNCIAS A FOCOS

Definições

Sejam F e F' dois pontos do plano π e seja uma constante $2a > FF'$. Elipse é o conjunto $K = \{P \in \pi \mid PF + PF' = 2a\}$.

Sendo a constante $0 < 2a < FF'$, hipérbole é o conjunto $W = \{P \in \pi\ ;\ |PF - PF'| = 2a\}$.

Construção da elipse

Consideremos uma circunferência λ de centro F e um ponto F' na região delimitada por ela. O lugar geométrico dos centros das circunferências tangentes a λ que passam pelo ponto F' é uma elipse (Figura 8). De fato, para cada ponto X de λ, obtemos um ponto P como intersecção de XF com a mediatriz de XF' e, sendo r o raio de λ, verificamos que $PF + PF' = PF + PX = r$, o que significa que P está na elipse de focos F e F'.

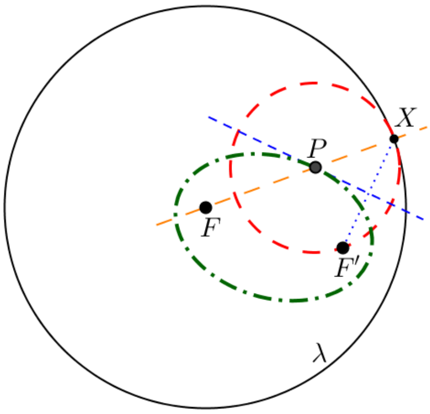

Figura 8: A elipse como conjunto de centros de circunferências

Uma vez construída por um programa de G.D., é interessante "arrastar" o ponto X para observar tanto as referidas circunferências tangenciando a circunferência dada como seus centros percorrendo a elipse.

Assim como na construção da parábola ilustrada pela Figura 7, podemos imaginar uma circunferência Λ com centro no ponto F' e raio r'. Os lugares geométricos dos centros de circunferências tangentes a λ e a Λ são duas elipses confocais, desde que Λ fique inteiramente contida na região delimitada por λ. A construção e a justificativa para esse fato seguem.

Na Figura 9, onde são apresentadas duas situações, em cada qual aparece uma elipse, traçamos uma semirreta FX, com X um ponto arbitrário de λ. Para obter um ponto dessa semirreta que seja centro de circunferência tangente às circunferências dadas, marcamos um ponto D na semirreta, tal que esteja entre F e X , no caso da figura da esquerda, ou tal que X esteja entre D e F, no caso da figura da direita. Em ambos os casos, ponhamos $DX = r'$. O ponto P, resultado da intersecção entre a semirreta FX e a mediatriz do segmento DF' pertence a uma elipse de focos F e F'. De fato, na figura da esquerda temos $PF + PF' = r - PX + PY - r' = r - r'$. À direita, temos $PF + PF' = r - PX + PY + r' = r + r'$.

Nas duas situações, observamos que a natureza das tangências às circunferências dadas é distinta, isto é, λ é tangenciada internamente e Λ, externamente.

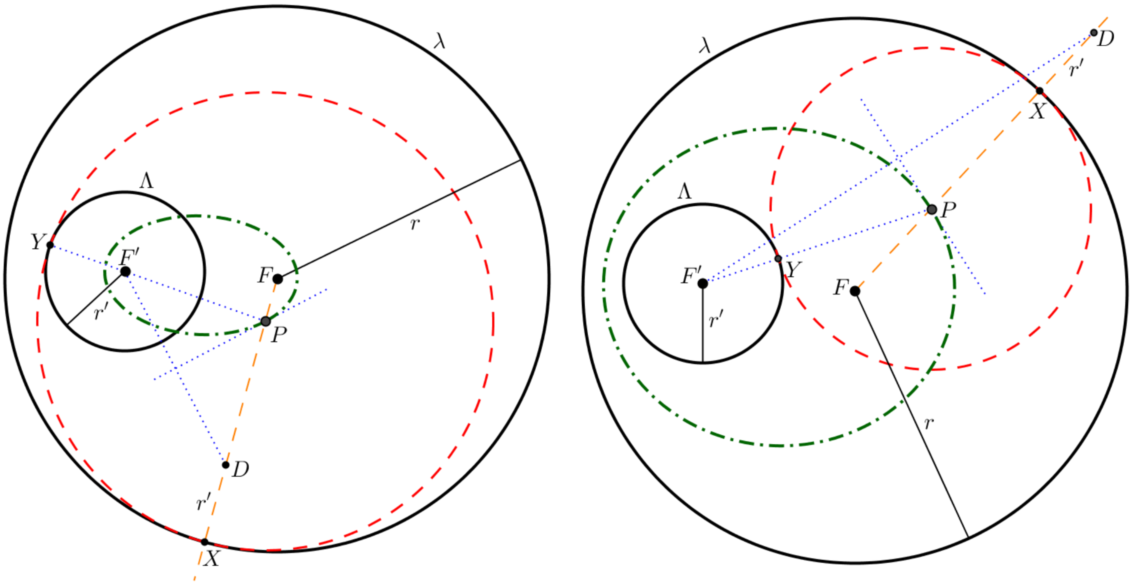

Figura 9: A elipse como conjunto de centros de circunferências, em duas novas situações

Construção da hipérbole

Com construção e justificativas análogas conclui-se que a hipérbole é constituída dos centros de circunferências tangentes a duas circunferências λ e Λ dadas, em que a região delimitada por uma é disjunta da delimitada por outra. A Figura 10 ilustra as duas situações para esse caso. Na figura da esquerda temos $PF - PF' = PX + r - (PY + r') = r - r'$. À direita, temos $PF' - PF = PY - r' - (PX - r) = r - r'$. O resultado são duas hipérboles de mesmos focos.

Em ambas as situações, observamos que a natureza das tangências às circunferências dadas é a mesma, isto é, λ e Λ são tangenciadas externamente.

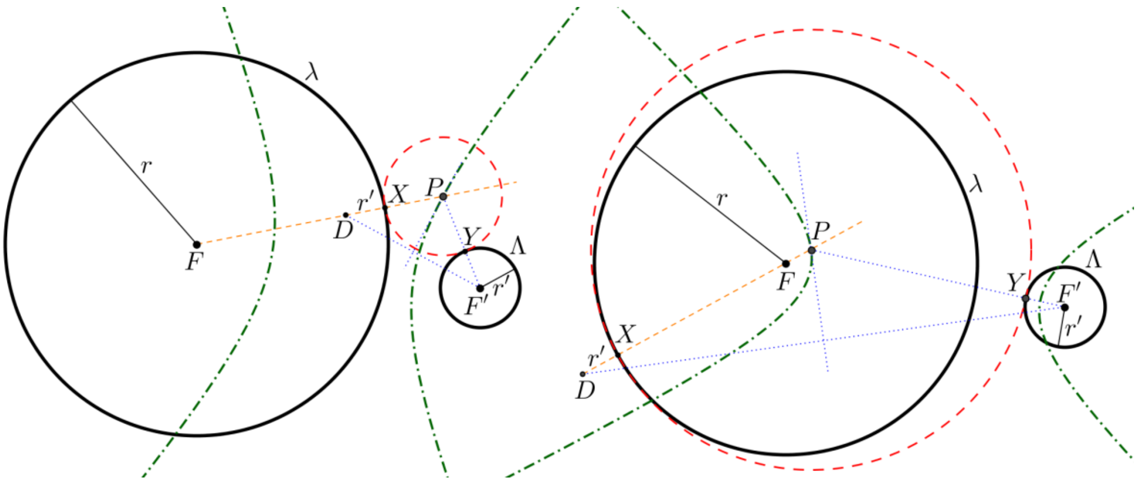

Figura 10: A hipérbole como conjunto de centros de circunferências, em duas novas situações

Convém salientar que existem, para cada caso, existem duas posições para o ponto X em λ para as quais a reta FX fica paralela à bissetriz de DF'. Pode-se constatar esse fato com os referidos recursos da informática, sendo razoável admitir que a tal bissetriz, nessa disposição, é uma assíntota da hipérbole.

Construção da elipse e da hipérbole em situação particular

Para o caso de as circunferências λ e Λ dadas intersectarem-se em exatamente dois pontos, temos como lugares geométricos dos centros de circunferências tangentes a estas, tanto elipse quanto hipérbole, de mesmos focos, cada qual com construção e justificativa inteiramente análoga às estudadas. Observemos que o tipo de cônica depende natureza das intersecções, como descrevemos anteriormente.

A Figura 11 ilustra a construção da elipse. Para cada ponto X que se considera na circunferência λ, tem-se $PF + PF' = r - PX + PY + r' = r + r'$.

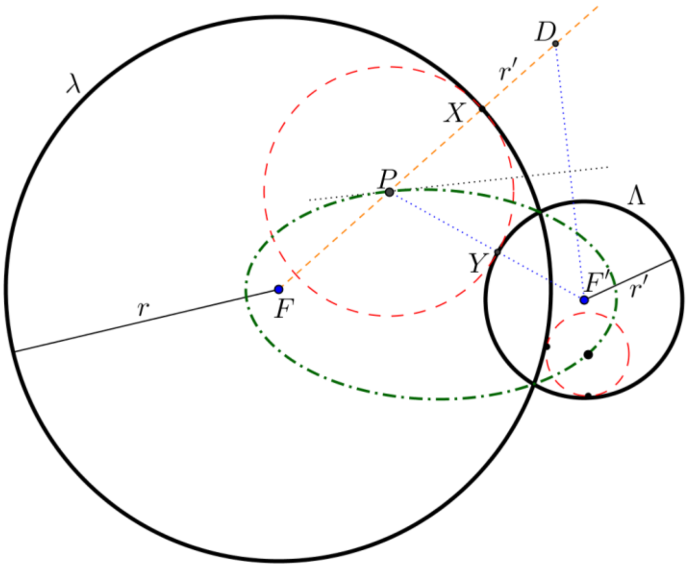

Figura 11: A elipse como conjunto de centros de circunferências, em situação particular

Já a Figura 12 ilustra a construção da hipérbole. Observamos, para o ponto X considerado na circunferência λ, que $PF - PF' = r + PX - PY - r' = r - r'$.

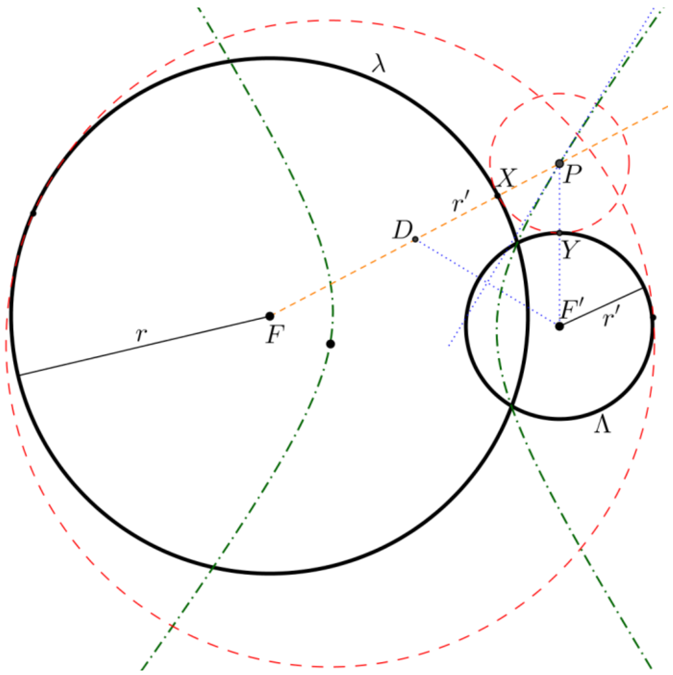

Figura 11: A hipérbole como conjunto de centros de circunferências, em situação particular

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Testemunhamos já há algum tempo o ensino da Geometria praticamente desvinculado ao das Construções Geométricas, prescindindo à importância como instrumento auxiliar no seu aprendizado. Os programas de computadores desenvolvidos para tanto, contribuem com a sua reinserção nos currículos escolares. Obstante, é interessante que sejam aproveitados como assistentes na investigação de propriedades das figuras construídas previamente com régua e compasso físicos.

Sob esse entendimento, ao propormos a construção das cônicas, tomamos como base duas de suas definições e exploramos as propriedades que possuem os pontos construídos. Os recursos da informática empregados, além de atestarem os resultados e possivelmente conduzirem à descoberta de novas propriedades, imprimem dinâmica à construção, tão benéfica ao processo de aprendizagem.

Outras maneiras de se obter cônicas podem ser incorporadas a esse estudo. Para citar um exemplo, aquela a partir de um ponto de um segmento (exceto suas extremidades e seu ponto médio), quando este mantém suas extremidades deslizando em duas retas perpendiculares, como indica a Figura 12 que segue. Um tratamento analítico a essa situação também é bem-vindo.

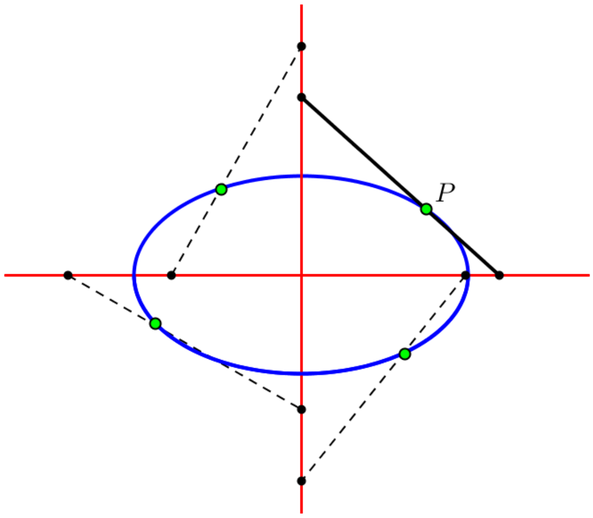

Figura 12: Um outro meio de se obter uma elipse

Referências

Garcia, J. C. (2013). Explorando as definições de cônicas. *Dissertação*. Rio Claro, Unesp.

Wagner, E. (2007). *Construções Geométricas*. Rio de Janeiro, RJ: SBM