A RELAÇÃO ENTRE ÁLGEBRA E GEOMETRIA, O EXEMPLO HISTÓRICO DE ARTHUR CAYLEY

Leandro Silva Dias, Gerard Emile Grimberg

Instituto de Matemática – UFRJ, Instituto de Matemática – UFRJ

Leandrosilvadias123@hotmail.com, Gerard.emile@terra.com.br

Embora haja um crescente uso da interdisciplinaridade no ensino, buscando relacionar matemática a física, dentre outras disciplinas, ainda se nota uma falta de comunicação no interior da própria matemática. O ensino de geometria e álgebra, de forma que esses temas sejam desconexos, nos é um grande exemplo. Fato que a história da matemática pode ajudar a trazer propostas que resolvam o problema, aproximando novamente os diversos conteúdos trazendo suas problemáticas originais.

Neste artigo, trazemos o caso histórico de uma ênfase nos métodos sintéticos em detrimento de métodos analíticos, na Inglaterra no início do século XIX. A partir de George Peacock, liderando a Sociedade Analítica, é que se conseguiu retirar os ingleses dessa situação de isolamento que havia deixado Cambridge em desvantagem em relação às demais instituições europeias. Dentro deste contexto surge Arthur Cayley que em muito colaborou nesse processo de "modernização" da matemática britânica do século XIX.

Sem a intenção de retirar algum método que possa ser aplicado diretamente ao ensino de geometria ou de álgebra, nosso artigo tem como objetivo mostrar a importância do uso da história da matemática sinalizando fatores importantes para um ensino mais integrado dessas disciplinas, apresentando o caso da contribuição de Cayley através de sua abordagem que entretém álgebra e geometria projetiva.

Palavras-chaves: Ensino, álgebra, geometria, história da matemática, Arthur Cayley.

INTRODUÇÃO

Apesar de todo o esforço que se tem realizado em prol de uma interdisciplinaridade, buscando relacionar matemática a física, dentre outras disciplinas, ainda se nota uma falta de comunicação entre os temas internos da própria matemática. Fato que a história da matemática pode ajudar ao trazer propostas que resolvam o problema, aproximando novamente os diversos conteúdos trazendo suas problemáticas originais.

Neste artigo, trazemos o caso histórico de uma ênfase nos métodos sintéticos em detrimento dos métodos analíticos, na Inglaterra no início do século XIX. Enquanto a notação de Leibniz para o cálculo diferencial e os métodos analíticos eram adotados por diversos países europeus, Cambridge mantinha a tradição de Newton e o uso de demonstrações sintéticas. Este fato fez com que os ingleses se mantivessem num estado de isolamento em relação à produção matemática continental (BALL, 1889, p. 98).

A partir de George Peacock, liderando a Sociedade Analítica, é que se conseguiu retirar os ingleses dessa situação de isolamento que havia deixado Cambridge em desvantagem em relação às demais instituições europeias. Dentro deste contexto surge Arthur Cayley que em muito colaborou nesse processo de "modernização" da matemática britânica do século XIX.

Cayley atuou neste contexto em dois papeis distintos, porém igualmente significativos para nossa pesquisa. Primeiramente, ele nos apresenta características do ensino de Cambridge enquanto aluno no Trinity College. Depois, enquanto matemático iniciando suas publicações nos diversos periódicos internacionais.

Não possuímos o intuito de retirar algum método que possa ser aplicado diretamente ao ensino de geometria, mas sim discutir fatos históricos relevantes que possam servir de inspiração para propostas inovadoras no ensino de geometria e álgebra, destacando a íntima relação entre estas disciplinas.

Logo, nosso artigo tem como objetivo mostrar a importância do uso da história da matemática na superação dessa falta de relação entre álgebra e geometria no ensino, apresentando o caso da contribuição de Cayley através de sua abordagem que entretém álgebra e geometria projetiva.

Para isto, trataremos do contexto do ensino de geometria na Inglaterra, mas especialmente em Cambridge, mostrando a superação da separação entre métodos sintéticos e analíticos. Depois, a figura de Arthur Cayley será apresentada como exemplo deste movimento que provocou mudanças no ensino de geometria na Inglaterra. Por fim, nossas conclusões apontam para algumas características importantes que podem ajudar a propiciar um ensino mais integrado de geometria e álgebra.

O CASO BRITÂNICO DO INÍCIO DO SÉCULO XIX

A escola newtoniana foi responsável por deixar a Inglaterra isolada do restante da Europa no que diz respeito aos desenvolvimentos matemáticos da análise e do cálculo diferencial.

A questão da escolha da notação de Newton na Inglaterra, em oposição à notação de Leibnitz pelo restante da Europa, não é suficiente para explicar o atraso britânico. Mesmo que a notação de Newton fosse superior à de Leibnitz, os matemáticos britânicos estariam em desvantagem em relação ao restante da comunidade matemática europeia que traduziam e utilizavam os resultados de Newton, Taylor, Maclaurin, dentre outros para sua própria notação. Por outro lado, os matemáticos ingleses não realizaram um esforço semelhante, se colocando em situação de distanciamento em relação aos seus vizinhos (BALL, 1889, p. 98).

Somado a isto, o fato da escola de Newton insistir no uso de demonstrações geométricas, mesmo após os princípios do cálculo diferencial já terem se tornados universais. Com isso, empregavam os métodos mais criativos possíveis para inserir tais demonstrações sempre que podiam. Daí uma resistência à análise e o critério de rigor britânico estar firmado na geometria sintética.

George Peacock foi o mais influente dos membros da escola analítica. Esta foi responsável por retirar os matemáticos britânicos desta situação de isolamento em relação ao restante da Europa. Este era um fato preocupante para esses matemáticos, uma vez que o isolamento britânico perdurava desde a última metade do século XVIII.

Este novo movimento, identificado como escola analítica, teve início com Robert Woodhouse que foi o primeiro a publicar um trabalho introduzindo as novas notações do cálculo diferencial. Com título: *Principles of analytical calculation*, sua obra foi publicada em 1803, em Cambridge, porém foi severamente criticada pela adoção dos novos métodos (BALL, 1889, p. 118).

Em 1812, Peacock, Herschel e Babbage, que seguindo a influência das observações de Woodhouse, concordaram em formar a Sociedade Analítica, com o objetivo de defender o uso dos métodos analíticos e da nova notação do cálculo diferencial na universidade, no lugar da antiga notação de Newton (BALL, 1889, p. 120).

Duas conquistas marcantes desta sociedade foram: primeiro, em 1816, a publicação da tradução do livro texto *Elementary differential calculus*, de Lacroix; e segundo, em 1817, Peacock introduziu os símbolos do cálculo diferencial no conjunto dos documentos do exame do *senate-house*[1] (BALL, 1889, p. 120).

Dentre as muitas inovações da Sociedade Analítica, pode-se destacar o aumento progressivo de trabalhos em geometria analítica. Segundo Ball (1889, p. 129), o único trabalho que introduzia o tema em Cambridge, no início do século XIX, se tratava da Álgebra de Wood, que possuía um apêndice de aproximadamente trinta páginas no final do livro. O título era: *On the application of álgebra to geometry*, e continha as equações da reta, da elipse, e de poucas outras curvas. Logo, a necessidade de um livro texto em geometria analítica foi primeiramente suprida pelo trabalho de Henry Parr Hamilton em 1826 (BALL, 1889, p. 129).

O livro texto de Henry Parr Hamilton, mudanças no ensino de geometria em Cambridge

Henry Parr Hamilton (1794-1880) graduou-se no Trinity College[2] em 1816. Exerceu vários ofícios universitários, pós graduando em 1819. O livro texto de Henry Parr Hamilton, *The Principles of Analytical Geometry Designed for use of students in the University*, como induz o próprio título, vinha suprir uma lacuna no ensino de geometria analítica em Cambridge. Em seu prefácio, Hamilton deixa claro que seu trabalho visa atrair a atenção dos estudantes a este ramo da ciência que ele considera extensamente útil para os superiores departamentos de matemática (HAMILTON, 1826, p. iii).

Sua abordagem detalhada possui duas partes: uma para geometria de duas dimensões e outra para geometria de três dimensões. Incluindo transformações dos eixos coordenados e sólidos de revolução, além da apresentação formal da reta, parábola, elipse e hipérbole e das curvas e superfícies quaisquer de segunda ordem.

Um tema importante para futuras pesquisas foi o uso das transformações lineares. Neste tema, De Morgan e George Boole escrevem importantes artigos que relacionam álgebra e geometria. Segue primeira proposição do livro de Hamilton:

> Prop. 1. To pass from one system of oblique axes to another, the origin being the same.
> Let x, y, z and x', y', z' be the co-ordinates of a point referred to the primitive and new axes respectively.
> If the same reasoning be applied to the plane, which was used (72) in the case of the straight line, it may be proved that the primitive co-ordinates are *linear* functions of the new ones; we shall assume, therefore,
> $$x = mx' + ny' + pz',$$
> $$y = m'x' + n'y' + p'z',$$
> $$z = m''x' + n''y' + p''z',$$
> in which the constants m, n, p ….. are now to be determined. (HAMILTON, 1826, p. 245)

A transformação linear das variáveis era abordada de forma clara com a interpretação geométrica de mudança dos eixos coordenados. Hamilton acrescenta em sua observação, feita após desenvolver alguns de seus corolários:

[1] Por esse período Peacock foi eleito professor "*moderator*", cuja função era preparar os exames das disciplinas de matemática.

[2] Cambridge é formada pelos *Colleges*, que seriam unidades com administração e espaço físico próprio. Neste caso, O Trinity College é uma dessas unidades que dentre as muitas funções: acomodavam alunos, participavam no processo de admissão, proviam tutores, possuíam bibliotecas e espaços sociais próprios, dentre outras características.

> Observation. The transformation of co-ordinates from one rectangular system to another, is subservient to various important inquiries in the higher departments of Mechanics. Among the different methods which have beem proposed for executing this operation, the one above given is the most generally used. It was employed for the first time by Euler, and was afterwards adopted by Lagrange and Laplace. (HAMILTON, 1826, p. 251)

Dois anos mais tarde, Hamilton publica *An analytical system of conic sections*, que foi substituído somente pelo trabalho de John Hymers, *Conic sections* de 1837 (BALL, 1889, p. 130). Peacock também contribui com o ensino de geometria analítica num trabalho que segundo Ball (1889, p. 130) foi emitido anonimamente, em 1833, com o título: Syllabus *of trigonometry, and application of álgebra to geometry*, possuindo setenta páginas destinadas à geometria analítica. Houve uma segunda edição em 1836, antes do trabalho de Hymers.

A INSERÇÃO DA FIGURA DE ARTHUR CAYLEY

Arthur Cayley, segundo Crilly (2006, p. 32), começou seus estudos no Trinity College em outubro de 1838. É possível que Peacock iniciasse seus estudos por álgebra e geometria, o que prepararia Cayley para seu futuro interesse de pesquisa.

Peacock também fazia frequente referência aos trabalhos de matemáticos continentais, com uma continua missão de trazer esses trabalhos para Cambridge e enfatizava a importância da álgebra aplicada à geometria (CRILLY, 2006, p. 32).

Com este incentivo e agora com acesso à biblioteca do Trinity College, Cayley seleciona alguns trabalhos em seus primeiros empréstimos, aos dezessete anos (1838): Géometrie descriptive de Gaspard Monge, Elements de géometrie de Adrien Marie Legendre e Méchanique Analytique de Joseph-Louis Lagrange. (CRILLY, 2006, p. 33).

Logo, Cayley se destaca por estudar os grandes matemáticos de seu tempo desde o seu início em Cambridge. Este fato sustentado por Crilly também foi destacado por Andrew Russell Forsyth, sucessor de Cayley como Sadleirian Professor na cadeira de matemática, em 1895, ano da morte de Cayley. Forsyth destaca em sua biografia de Cayley:

> Cayley had evidently read with enquiring and critical care the Mécanique Analytique of Lagrange, some of the work of Laplace, and several memoirs in the two continental journals of the time, those of Liouville and Crelle. (FORSYTH, 1895, p. xii).

Forsyth (1895, p. xii) ainda destaca que este fato era raro para um estudante de 19 a 20 anos de sua época.

Em outra de suas idas à biblioteca do Trinity College, Cayley consulta a obra Géométrie de Position de Lazare Carnot (CRILLY, 2006, p. 48). Este fato ocorreu antes da publicação de seu primeiro artigo, o que sugere uma influência francesa em suas primeiras pesquisas.

Seu primeiro trabalho publicado

Estes fatos explicam o interesse do primeiro artigo de Cayley *On a Theorem in the Geometry of Position*, de 1841, de fazer uso da relação álgebra e geometria, o que está em consonância com o movimento trazido pela escola analítica e com sua leitura das recentes produções matemáticas dos principais jornais de sua época.

O trecho inicial do artigo deixa clara sua intenção:

We propose to apply the following (new?) theorem to the solution of two problems in Analytical Geometry.

Let the symbols

$$|\alpha|, \begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ \alpha', & \beta' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{vmatrix}, \&c.$$

denote the quantities

$\alpha, \alpha\beta' - \alpha'\beta, \alpha\beta'\gamma'' - \alpha\beta''\gamma' + \alpha'\beta''\gamma - \alpha'\beta\gamma'' + \alpha''\beta\gamma' - \alpha''\beta'\gamma, \&c.$ (CAYLEY, 1841, p. 1)

Neste artigo de 1841, Cayley se propôs a encontrar a relação existente entre cinco pontos no espaço. Usando para isto recursos algébricos, dentre os quais propriedades dos determinantes e uso das equações da circunferência e da esfera (CAYLEY, 1841, p. 2).

Crilly (2006, p. 55) destaca alguns fatos importantes deste primeiro artigo de Cayley. Iniciando pelo fato do problema já ter sido tratado por J. L. Lagrange, Lazare Carnot e Jacques Binet (amigo de Cauchy), mostrando a capacidade de Cayley em reconhecer problemas e interpretá-los trazendo para a realidade inglesa e expressando relações algébricas por meio de determinantes.

Este trabalho inicial demonstra o grande interesse de Cayley pela álgebra aplicada à geometria. Este fato condiz com as possíveis influências recebidas por seu primeiro tutor de Cambridge, George Peacock, pelo ambiente propício criado pela escola analítica e pelas suas leituras enquanto graduando.

A difusão da geometria projetiva analítica

A geometria projetiva pode ser identificada como disciplina separada na França, a partir do tratado de Poncelet e mais difundida através do *Aperçu Historique* de Michel Chasles. Se torna analítica com os trabalhos de Möbius (Cálculo baricêntrico) e, principalmente, com o *System der Analytischen Geometrie* de Julius Plücker, na Alemanha.

Mansion (1873, p. 314) ressalta a importância do trabalho de Plücker que introduz as coordenadas homogêneas e o tratamento analítico das propriedades projetivas. Destaca duas vantagens deste novo método: a idéia das curvas e das superfícies mais gerais e os imaginários que surgem nas equações algébricas. Plücker fez belas aplicações deste método para estudar curvas de terceira ordem (MANSION, 1873, id.). Ainda menciona Möbius e seu cálculo baricêntrico, destacando o fato que depois as principais ideias foram sintetizadas por Steiner e com desenvolvimentos de Chasles, em seu *Aperçu Historique* (MANSION, 1873, p.315).

Este trabalho de Chasles exerceu influência sobre as pesquisas de Cayley (CRILLY, 2006, p.65). Podem-se citar como exemplo os primeiros artigos de Cayley que trata de curvas algébricas: *On the intersection of curves* (1843) e *On the theory of algebric curves* (1843). No primeiro artigo, Cayley cita um teorema presente no *Aperçu Historique* que Chasles usa para demonstrar o teorema de Pascal. O teorema como apresentado por Cayley: "Se uma curva de terceira ordem passa através de oito pontos de interseção de duas curvas de terceira ordem, ela passará através do nono ponto de interseção". (CAYLEY, 1843a, p. 25, tradução nossa).

Cayley estende a definição para curvas de ordem "*m*" e "*n*" e relaciona aos *m.n* pontos de interseção (CAYLEY, 1843a, p. 26).

Já no segundo artigo, Cayley considera os casos onde a interseção pode ser menor que *m.n*, considerando formas de ordem "*m*" e "*n*".

E no final deste segundo artigo cita duas fontes de referência no assunto: primeira, Jacobi, *Theoremata de punctis intersectionis duarum curvarum algebraicarum*, do jornal do Crelle (1836, volume XV); e, segundo, Plücker, *Théorèmes généraux concernant les equations à plusieurs variables, d'un degré quelconque entre un nombre quelconque d'inconnues*, jornal do Crelle (1837, volume XVI).

Já nestes artigos pode-se constatar o quanto Cayley conhecia dos trabalhos dos matemáticos continentais como Lagrange, Jacobi, M. Chasles, Plücker, dentre outros. Este fato nos ajuda a entender o rápido desenvolvimento dos artigos de Cayley e sua extraordinária produção matemática.

Importante de se destacar é o cedo interesse de Cayley sobre polinômios homogêneos, formas homogêneas, como fica perceptível na introdução de seu segundo artigo. Cayley simboliza essas formas de grau m como H_m, deixando clara a propriedade de homogeneidade ao afirmar que os termos de H_m são os de U, uma função de coeficientes inteiros e racionais, todos de grau m (CAYLEY, 1843b, p. 46).

Em meados de 1844, Cayley demonstra seu interesse por este campo de pesquisa através de uma carta endereçada a Boole.

As seis primeiras Memórias sobre *quantics*

Os trabalhos publicados pelos matemáticos britânicos De Morgan e George Boole[3], onde se destaca o artigo de 1841, sobre o tema das transformações lineares, influenciaram Cayley nas suas pesquisas sobre este tema. Cayley produz os artigos de 1845 e 1846[4] que são considerados por Crilly (1986, p. 242) o início da Teoria dos Invariantes, como ficou conhecida a teoria após Sylvester definir a sua nomenclatura. Sobre este tema Cayley escreve uma série de dez memórias, chamadas de *Memoir upon Quantics*[5] (1854-1878), no *Philosophical Transactions of Royal Society of London*. *Quantic* era como ele chamava os polinômios homogêneos de um dado número de variáveis e um dado grau.

Dentre essas memórias a Sexta é a mais conhecida, pois, desde que Félix Klein a destacou utilizando os resultados de Cayley para realizar sua classificação das diversas geometrias a partir da geometria projetiva, esta tem sido reconhecida por possuir resultados geométricos importantes. Além de Cayley definir uma métrica, utilizando geometrias de duas ou três dimensões, ele chega à conclusão de que geometria projetiva (Cayley chamava de descritiva) seria a mais simples, de onde deriva inclusive a geometria euclidiana.

O que não foi ainda bem estudado é o fato de essas memórias possuírem uma visão geométrica que acompanha os desenvolvimentos de Cayley desde a Primeira Memória. Nesta memória, Cayley define o que é um *quantic*; o que é uma equação, que é o caso da *quantic* ser igualada a zero; o que essas equações representam que seria cada uma um lócus, ou seja, um conjunto de pontos no espaço. Cayley coloca em discussão também a questão de se considerar o espaço de dimensão n, considerando *quantics* possuindo n variáveis, porém quanto ao espaço físico ele considera como de três dimensões. Também importante dizer que Cayley trabalha com um sistema de coordenadas que hoje chamamos de coordenadas homogêneas. Ele explicita o uso de transformações do sistema de coordenadas cartesianas para as coordenadas homogêneas, e vice-versa. E é claro que esta memória apresenta o trabalho algébrico da teoria, mostrando sua escolha pelo método que ele mesmo apresentou em seu artigo de 1845, onde há o uso das soluções de equações diferenciais parciais para se encontrar os invariantes ou covariantes.

[3] Artigo de De Morgan: *On the General Equation of Curves of Second Degree*, de 1830; artigo de G. Boole: *Exposition of a general theory of linear transformations*, de 1841.

[4] Artigo de 1845: *On The Theory of Linear Transformations*, artigo de 1846: *On Linear Transformations*.

[5] *Quantic* foi a nomenclatura utilizada por Cayley para denominar polinômios homogêneos de coeficientes racionais de um dado grau. Exemplo: a *quantic* $ax^2 + bxy + cy^2$ é uma quádrica binária.

Logo, conforme ocorreu com o movimento trazido pela Sociedade Analítica, que apesar de trazer a análise e o Cálculo diferencial para uma nova dimensão de rigor, não abandonou por completo o uso de uma visão geométrica destes. Cayley prossegue seus trabalhos sem deixar de lado os aspectos geométricos ligados à álgebra dos polinômios homogêneos. Pode-se perceber isto nas memórias, em especial nas Quinta e Sexta memórias.

Após Cayley escrever as três primeiras memórias, ele submete em onze de março de 1858 sua Quarta e Quinta Memórias sobre *Quantics*. Neste ponto a Teoria dos Invariantes já possuía seus principais resultados. Cayley afirma no final de sua Quarta Memória: “But I have now, I think, established the greater part by far of the definitions which are for the present necessary” (CAYLEY, 1858a, p. 326).

Logo, desde já bem estabelecida a estrutura algébrica, Cayley começa a Quinta Memória sobre *Quantics* com o claro objetivo de relacionar esta álgebra à geometria. Em sua introdução ele afirma:

> [...] and I have therefore comprised such systems of two or more quadrics, and the resulting theories of the harmonic relation and of involution, in the subject of the memoir; and although the theory of homography or of the anharmonic relation belongs rather to the subject of bipartite binary quadrics, yet from its connexion with the theories just referred to, it is also considered in the memoir. (CAYLEY, 1858b, p. 527)

A introdução da Quinta Memória reforça nossa consideração de uma abordagem geométrica da Teoria dos Invariantes que acompanha o pensamento de Cayley. Cayley retoma as propriedades projetivas utilizando coordenadas homogêneas.

Como exemplo desta relação, Cayley (1858b, p. 533) apresenta na Quinta Memória o caso onde as quádricas $U= ax^2+2bxy+cy^2$, $U'= a'x^2+2b'xy+c'y^2$ e $U''= a''x^2+2b''xy+c''y^2$ estão em involução. Isto ocorre quando o determinante abaixo é nulo:

$$\Omega= \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{vmatrix} .$$

A equação Ω=0 garante que as quádricas possuem o que era chamado de uma relação de “syzygetic[6]” que pode ser expresso como $\lambda U+ \mu U'+ \nu U''=0$, que significa que as três quádricas estão em involução. Além desta consideração, Cayley desenvolve vários aspectos importantes que relaciona a álgebra dos invariantes com propriedades projetivas. Em sua famosa Sexta Memória sobre *Quantics*, ele retoma esses desenvolvimentos organizando suas conclusões para o caso da reta projetiva, com duas coordenadas homogêneas, e no plano projetivo, utilizando três coordenadas projetivas.

A noção de absoluto, a caminho de uma nova visão da geometria

Cayley inicia a Sexta Memória sobre *Quantics* apresentando, logo na introdução, seu principal objetivo: “A chief object of the present memoir is the establishment, upon purely descriptive principles, of the notion of distance” (CAYLEY, 1859, p. 561). Ou seja, ele pretende utilizar uma métrica no espaço projetivo, para isto se utiliza de seus resultados obtidos nas memórias anteriores.

A Quinta Memória possui uma estreita relação com a Sexta Memória sobre *Quantics*, todos os principais resultados da Quinta Memória são retomados fins organizar a noção de distância nas

[6] O termo equivale ao moderno “linearmente dependente”.

geometrias de "uma dimensão", no caso nas *quantics* binárias nas retas projetivas, e de "duas dimensões", utilizando *quantics* ternárias operando no plano projetivo. A definição de "Absoluto" ocorre quando Cayley (1859, p. 583) retoma suas definições e inicia considerando o caso da "geometria de uma dimensão", ou seja, a reta projetiva. Neste caso o Absoluto é um par de pontos, e utilizando as relações de involução e razão harmônica ele chega à relação de distância. Então, para o absoluto $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$, na notação de Cayley: $(a, b, c)(x, y)^2 = 0$, ele encontra a seguinte relação de distância, dados os pontos (x, y) e (x', y'):

$$\cos^{-1} \frac{(a,\ b, c)(x, y)(x', y')}{\sqrt{(a, b, c)(x, y)^2}\sqrt{(a, b, c)(x', y')^2}}.$$

Cayley propõe o caso das modificações no Absoluto para a definição de distância na geometria esférica (CAYLEY, 1859, p. 591) e, em especial, para a geometria euclidiana. Ele afirma:

> In ordinary plane geometry, the Absolute degenerates into a pair of points, viz. the points of intersection of the line infinity with any evanescent circle, or what is the same thing, the Absolute is the two circular points at infinity. (CAYLEY, 1859, p. 592)

Deste resultado ele chega a conclusão mais importante deste memória: "Metrical geometry is thus a part of descriptive geometry, and descriptive geometry is all geometry, [...]" (CAYLEY, 1859, p. 592). "Metrical geometry" trata-se da geometria euclidiana e "descriptive geometry" da geometria projetiva, ou seja, Cayley conclui que a geometria mais elementar é a geometria projetiva, o que quebrava o paradigma da geometria euclidiana ser a mais fundamental, de onde inclusive se fundamentava a geometria projetiva até então.

Observa-se o fato da teoria algébrica ser utilizada a tal ponto de provocar mudanças estruturais da geometria, chegando a alterar o próprio papel desta e a forma como se organiza. Estes resultados de Cayley foram tomados por Félix Klein que conseguiu classificar as geometrias euclidianas e não euclidianas. Klein utiliza o logaritmo e não o arco cosseno como fez Cayley, Rosenfeld (1988, p. 238) nos mostra como Klein define a noção de distância da geometria hiperbólica de Lobachevsky, bem como as diferenciações que ocorrem para a geometria elíptica e para a geometria euclidiana. Cayley, apesar de conhecer a geometria de Lobachevsky, não relacionou seus resultados obtidos na Sexta Memória com uma possível definição de distância para este caso.

CONCLUSÕES

A ênfase em apenas uma abordagem, e a necessária superação para uma comunicação entre álgebra e geometria. No caso britânico, do início do século XIX, como foi apresentado, necessitou até mesmo a produção de novos livros textos adequados a esta realidade. Pode-se questionar se não seria o caso da introdução de novas abordagens nos livros e manuais adotados nas graduações. As mudanças trazidas pela Sociedade Analítica influenciaram inclusive nos currículos, uma vez que, os professores avaliadores mudaram os conteúdos dos exames. Este fato pode trazer luz à forma de implementação de um currículo adequado a esta perspectiva de comunicação entre os temas internos da matemática.

O contexto de Cambridge e sua visão de ensino nos moldes de tutoria, de onde retiramos o exemplo de Cayley cujo tutor inicial foi Peacock, que o estimulou nas leituras das obras mais atuais de seu tempo. O papel do professor e de sua visão acerca da própria matemática deve ser considerada numa proposta onde a matemática tenha uma maior comunicação entre seus conteúdos.

O exemplo da produção matemática de Cayley, sua abordagem constantemente relacionava álgebra à geometria e, esta característica, pode ter sido fundamental para explicar sua grande produção matemática. As várias relações entre álgebra e geometria nos diversos textos de Cayley poderiam ser usadas nas graduações em matemática, como exemplo de uma forma de usar um texto da história da matemática na educação matemática. As transformações lineares poderiam ser introduzidas com trechos de artigos de De Morgan, Boole e Cayley, o que destacaria a forte relação entre abordagem algébrica com uso de visão geométrica.

A relação álgebra e geometria projetiva presentes nas Memórias sobre *quantics* realçam a grande eficácia desta abordagem, onde ambas as teorias podem ser beneficiadas, ou seja, a álgebra e a geometria uma complementando o raciocínio da outra, trazendo assim importantes resultados. Este e outros exemplos históricos demonstram que a matemática não era de forma alguma fragmentada, divergindo completamente da forma pela qual se ensinam os conceitos já estabelecidos. A história da matemática nos ajuda a reconstruir o ambiente no qual os conceitos foram desenvolvidos e, com isso, a trazer novamente a relação perdida entre os conteúdos.

Referências

BALL, W. W. R. **A History of the Study of Mathematics at Cambridge**. Cambridge: Cambridge University Press, 1889. 264 p.

CAYLEY, A. On a Theorem in the Geometry of Position. Cambridge mathematical journal, 1841. p. 1-4. In: CAYLEY, A. **The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley**. Cambridge: At The University Press, v. 1, 1889. 589 p.

______. On the intersection of curves. Cambridge mathematical journal, 1843a. p. 25-27. In: CAYLEY, A. **The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley**. Cambridge: At The University Press, v. 1, 1889. 589 p.

______. On the theory of algebric curves. **The Cambridge mathematical Journal**, v. 4, p. 102-112, 1843b.

______. A Fourth Memoir upon Quantics. Philosophical Transactions of Royal Society of London, 1858a. In: CAYLEY, A. **The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley**. Cambridge: At The University Press, v. 2, 1889. p. 513-526.

______. A Fifth Memoir upon Quantics. Philosophical Transactions of Royal Society of London, 1858b. In: CAYLEY, A. **The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley**. Cambridge: At The University Press, v. 2, 1889. p. 527-557.

______. A Sixth Memoir upon Quantics. Philosophical Transactions of Royal Society of London, 1859. In: CAYLEY, A. **The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley**. Cambridge: At The University Press, v. 2, 1889. p. 561-592.

CRILLY, T. **Arthur Cayley Mathematician Laureate of the Victorian Age**. Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press, 2006. 609 p.

FORSYTH, A. R. Arthur Cayley, 1895. p. ix - xliv. In: CAYLEY, A. **The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley**. Cambridge: At The University Press, v. 8, 1889. 570 p.

HAMILTON, H. P. **The Principles of Analytical Geometry Designed for use of students in the University**. Cambridge: Cambridge University Press, 1826. 326 p.

MANSION, P. Notice sur les travaux de Jules Plücker. **Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques**, v. 5, p. 313-319, 1873.

ROSENFELD, B. A. **A History of Non-Euclidean Geometry Evolution of The Concept of a Geometry Space**. New York: Springer-Verlag, 1988. 471 p.