MATEMÁTICA ELEMENTAR E SABER PEDAGÓGICO DE CONTEÚDO – ESTABELECENDO RELAÇÕES

Leticia Rangel

Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil

leticiarangel@ufrj.br

Victor Giraldo

Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil

victor.giraldo@ufrj.br

Nelson Maculan

Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil

maculan@cos.ufrj.br

O presente trabalho pretende contribuir para a reflexão acerca do desenvolvimento do saber do conteúdo matemático para o ensino no contexto da formação do professor de matemática do ensino básico. Busca-se estudar, sob a perspectiva da formação desse professor, a relação entre o saber pedagógico de conteúdo (Shulman, 1986) e percepção da matemática elementar a partir das ideias de Felix Klein (Klein, 2010). Mais especificamente, tendo como referência metodológica a noção de Concept Study (Davis, 2010), busca-se investigar a contribuição de um processo de discussão coletiva centrado em conteúdos do ensino básico pode levar ao reconhecimento de aspectos elementares desses conteúdos (no sentido de Klein) e ao desenvolvimento do meta-saber por parte dos professores.

Palavras-chaves: Saber Pedagógico de Conteúdo, Elementarização, Concept Study.

INTRODUÇÃO

É certo que a formação profissional dos professores é um elemento crucial no esforço para se constituir um sistema eficaz de educação matemática. No entanto, a formação do professor muitas vezes ainda parece distante e desconectada do trabalho de ensinar matemática, ou seja, da prática dos professores. Questões centrais para a investigação sobre a formação dos professores incluem a articulação característica e intrínseca entre os conhecimentos sobre o conteúdo a ser ensinado e sobre pedagogia, quando exigidos na prática docente. Nesse sentido, destaca-se o trabalho de Shulman (1986, 1987), que propõe a noção de saber pedagógico de conteúdo, como um conhecimento especial do professor que se constitui a partir do vínculo entre conteúdo e pedagogia. Trata-se de um conhecimento que, por sua própria natureza, não se esgota na formação inicial do professor, ainda que não prescinda de conhecimentos que devem ser adquiridos nessa etapa, e que se amplia de forma constante e permanente ao longo da prática profissional. Entender como o saber pedagógico de conteúdo (Shulman, 1986) se desenvolve e determinar estratégias para que este seja apropriado pelos professores é a motivação de uma linha importante na pesquisa em Educação Matemática, que aponta para a necessária valorização da prática (BALL, 1988, BALL et al, 2008, BALL et al, 2009a; BALL et al, 2009b , DAVIS, 2010, KRAUSS et al, 2008, DOERR & LESH, 2003, PEREIRA et al, 2013).

A preocupação com a formação profissional do professor também se reflete no legado de Felix Klein. Em sua obra, hoje clássica, Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior[1], publicada pela primeira vez há cerca de um século, Klein constata uma ruptura entre a matemática escolar, aquela ensinada nos sistemas de ensino básico, e a matemática acadêmica universitária. Klein identifica essa ruptura como uma dupla descontinuidade, que se estabelece na falta de conexão entre a matemática aprendida na escola básica e a matemática que determina os cursos de formação de professores.

> Os jovens estudantes universitários são confrontados com problemas que nada têm a ver com as coisas que estudaram na escola e, naturalmente, esquecem-nas rapidamente. Quando, depois de completarem o curso, se tornam professores confrontados com a necessidade de ensinar a matemática elementar na forma adequada ao grau de ensino, primário ou secundário, a que se dedicam, e como não conseguem estabelecer praticamente nenhuma relação entre esta tarefa e a matemática que aprenderam na universidade, facilmente aceitam o ensino tradicional, ficando os estudos universitários como uma memória mais ou menos agradável que não tem influência na sua forma de ensinar. (KLEIN, 2009, p.1)

Nesse cenário, emerge como uma perspectiva interessante, relacionar o *saber pedagógico de conteúdo*, proclamado por Shulman (1986, 1987), e as ideias de Klein, com especial atenção à noção de matemática *elementar*. Assim, o presente trabalho pretende contribuir para a reflexão acerca do desenvolvimento do saber pedagógico de conteúdo no contexto da formação do professor de matemática do ensino básico. Busca-se investigar como um processo de discussão coletiva centrado em conteúdos do ensino básico pode levar ao reconhecimento de aspectos elementares desses conteúdos (no sentido de Klein) e ao desenvolvimento do meta-saber por parte dos professores. O estudo que sustenta a apresentação deste trabalho tem como referencial metodológico a noção de *Concept Study* (DAVIS, 2010), sendo desenvolvido, portanto, a partir de uma série de sessões coletivas com um grupo de professores que tiveram números racionais como assunto central.

O SABER PEDAGÓGICO DE CONTEÚDO

Em 1896, Shulman, em seu artigo *Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching*, discute o conhecimento do professor e identifica um domínio especial desse conhecimento, introduzindo a noção de *saber pedagógico de conteúdo* no cenário da pesquisa em educação. Tomando como referência a análise de ações relativas à habilitação e à formação de professores nos Estados Unidos nas décadas de 1970 e 1980 e a complexidade do conhecimento necessário ao ensino, Shulman conduz a discussão acerca do tema com foco no conhecimento do conteúdo a ser ensinado. Assim, distingue o *saber de conteúdo*, entendido como relativo exclusivamente à matéria a ser ensinada, sem compromisso específico com o ensino, do *saber pedagógico de conteúdo*. Esse último indicando um saber necessário ao professor que extrapola o conhecimento do conteúdo disciplinar *per se*, contemplando a dimensão do conhecimento *sobre* conteúdo *para* o ensino, percebido como um conhecimento que congrega conteúdo e estratégias pedagógicas de forma indissociável e articulada.

> Em relação ao saber pedagógico de conteúdo, eu incluo, para os assuntos mais regularmente ensinados em uma disciplina, as formas mais eficientes de representação das ideias, as mais poderosas analogias, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações – em outras palavras, as maneiras de representar e formular o assunto que o tornam compreensível para os outros. (SHULMAN, 1986, p.9)

[1] Na versão original, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, publicada em 1908 e 1909 – Obra em três volumes que traz lições de matemática elaboradas por Felix Klein para professores das séries finais do ensino básico.

Assim, o *saber pedagógico de conteúdo* não pode ser identificado ao saber de pedagogia nem ao saber de conteúdo, ainda que se estabeleça a partir dessas dimensões do conhecimento. O saber pedagógico de conteúdo se configura como um eixo reconhecidamente importante e particular na construção dos saberes necessários para o ensino, tornando-se imperativo na pauta de pesquisa em educação. (BALL, THAMES & PELPS, 2008).

AS IDEIAS DE FELIX KLEIN

A influência e a contribuição do matemático alemão Felix Klein[2] para a Matemática e para o ensino da disciplina é inquestionável, extrapola fronteiras físicas e acadêmicas e vence o tempo, apresentando-se ainda atual. Em especial, destaca-se do seu legado a obra *Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior*. Essa obra, hoje clássica, originou-se de notas de aulas dadas por Klein para cursos de formação de professores da Universidade de Göttingen. Publicado em 1908 e 1909, o compêndio é organizado em três volumes[3], o primeiro sobre aritmética, álgebra e análise, o segundo sobre geometria e o último, menos conhecido, mas não menos importante para Klein, contemplando temas teóricos e aplicados de análise e de geometria (Schubring, 2012, Rodrigues, 2009). Defensor da percepção da Matemática como um todo orgânico (Klein, 2009; Kilpatrick, 2010; Schubring, 2012), Klein, revela em seu trabalho a intenção de "chamar a atenção dos professores de matemática e de ciências da escola básica para o valor dos seus estudos acadêmicos" (KLEIN, 2010, p.v, tradução nossa). Segundo Bass (2005), Klein derramou a luz da matemática disciplinar sobre a matemática escolar, tendo em conta a especificidade da aprendizagem nesse nível de formação e sendo sensível aos desafios enfrentados pelos professores.

Observamos que, neste trabalho, atribui-se o mesmo entendimento às expressões "matemática científica", "matemática acadêmica", "matemática universitária" e "matemática superior", como referência à matemática relativa à produção científica que permeia o ambiente acadêmico universitário, alcançando de forma ampla desde conteúdos ensinados nas disciplinas de formação até resultados produzidos a partir de pesquisas de ponta. Já o termo matemática escolar diz respeito à matemática ensinada na escola básica[4], abrangendo a seleção e a organização dos conteúdos e as suas abordagens e ignorando particularidades regionais ou de unidades escolares específicas. Segundo Schubring (2012), Klein, observa a matemática escolar e a matemática superior sob uma perspectiva unitária e como visceralmente atreladas a partir de um processo histórico. Esse processo é identificado por Schubring (2012) como translação histórica (*historical shifting*). Acreditamos que esse entendimento de Klein é determinante para a compreensão de algumas das suas ideias, em particular para a identificação do fenômeno de *dupla descontinuidade* e para o entendimento da *elementarização da Matemática*. Além disso, as ideias de Klein têm desdobramentos para o reconhecimento da complexidade e da importância do saber de conteúdo

---

[2] Felix Christian Klein – 25/04/1849 (ou $5^2/2^2/43^2$, como o próprio Klein gostava de ressaltar), Düsseldorf, Alemanha – 22/06/1992, Göttingen, Alemanha.

[3] Embora os dois primeiros volumes tenham sido traduzidos para diversas línguas, o terceiro foi editado apenas no idioma original. O volume I foi editado recentemente em língua portuguesa pela Sociedade Portuguesa de Matemática (spm) em três partes (Klein, 2009, 2010b, 2011).

[4] Os contextos histórico e político educacional observados por Klein identificam como matemática escolar a matemática ensinada nas escolas de nível médio, ou escolas secundárias, alemãs (Gymnasium e Oberralschule). É objetivando a formação dos professores que atuam neste nível de ensino que Klein desenvolve seu trabalho. Na Alemanha, à época, a formação de professores que atuavam na formação inicial, escolas primárias, não exigia graduação em nível superior. Nessa época esses segmentos primário e secundário da escolaridade eram estritamente separados, socialmente e quanto ao saber. (SCHUBRING, comunicação pessoal, março de 2012). Neste documento, admitindo uma circunstância ideal, adotaremos a interpretação das ideias de Klein para um contexto em que matemática básica corresponde a toda matemática ensinada nas escolas de nível básico sem a preocupação de caracterizar inclusive a diferença entre, nos termos do Brasil, o ensino fundamental e o ensino médio.

necessário para o ensino da disciplina na escola básica e para a reflexão acerca da constituição desse saber e da formação docente.

Dupla descontinuidade

Na introdução de sua obra, *Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior*, Klein identifica um problema que afligia a formação dos professores em sua época – a alienação entre a escola e a universidade. Ou seja, o autor identifica uma ruptura entre a *matemática escolar*, e a *matemática superior*. Para o autor, à época, "universitários ocupavam-se exclusivamente de sua ciência sem se preocuparem com estabelecer conexões com a matemática escolar" (KLEIN, 2009, p.1).

Com a identificação dessa ruptura, Klein aponta uma *dupla descontinuidade* na formação do professor – por um lado, há pouca relação entre a matemática estudada na universidade e aquela aprendida anteriormente na formação básica e, por outro lado, em sua ação profissional, o professor da escola básica dificilmente consegue estabelecer relações entre a matemática que ensina e aquela estudada em sua formação acadêmica. É justamente essa ruptura que mobiliza e motiva Klein a desenvolver seu trabalho.

> O meu objetivo consiste em mostrar-vos sempre *as conexões entre problemas de diferentes áreas*, o que não acontece de forma suficiente na generalidade dos manuais, e, mais especificamente, sublinhar a relação com os da matemática escolar. Espero que desta forma se torne mais fácil para o leitor adquirir a capacidade que considero o verdadeiro objetivo dos estudos acadêmicos: a de retirar das grandes questões científicas que nos são oferecidas abundantes estímulos e orientações para o exercício da própria atividade docente. (KLEIN, 2009, p.2, itálico como no original)

Klein identifica dois esforços que caracterizam a preocupação à época: munir os conteúdos escolares com novas ideias resultantes do desenvolvimento da ciência e ter em conta, na formação universitária do professor da escola básica, as necessidades da sua ação profissional futura. A preocupação do autor com o ensino da disciplina e com a formação do professor da escola básica fica evidente em sua aula inaugural, quando da sua admissão em Erlanger (ROWE, 1983, 1985). Para Klein, "As universidades devem estar atentas ao ensino nas escolas preparatórias (escolas de nível médio), e, portanto, dar especial atenção à formação de professores desse nível de ensino" (KLEIN, 1923, p.18; apud ROWE, 1983, p.451, tradução nossa).

O conhecimento do professor

Para Klein "o professor deve ter muito mais conhecimentos do que aqueles que expõe a seus alunos" (KLEIN, 2011, p.29). Sobre o saber de conteúdo necessário para o ensino na escola básica, Klein indica que o professor não deve somente ter conhecimento sobre os conceitos e as teorias que ensina, mas também saber relacionar e articular esses diferentes conceitos e teorias e compreender sua natureza científica e evolução histórica. Ancorado na compreensão da Matemática como corpo orgânico, Klein qualifica a percepção hierárquica e estanque entre matemática escolar e matemática superior como um obstáculo a ser vencido (KILPATRICK, 2010; SCHUBRING, 2012). Seu entendimento fica claro quando se dirige ao leitor que acompanha as lições que compõem a sua obra,

> Se não forem suficientemente orientados, se não estiverem bem informados acerca dos elementos intuitivos da matemática bem como das relações vitais entre áreas próximas entre seus ramos e as outras ciências. Se, acima de tudo, não conhecerem o desenvolvimento histórico, seus passos serão muito inseguros. Retirar-se-ão, então, para o campo da matemática pura mais moderna e não serão mais compreendidos na escola secundária ou sucumbirão ao assalto, desistirão do que aprenderam na universidade e, mesmo na vossa maneira de ensinar, deixar-se-ão enterrar na rotina tradicional. (KLEIN, 2011, p.127)

Em sua proposta, Klein assume que os futuros professores têm conhecimento sobre os principais ramos da matemática e busca mostrar como esses ramos se articulam entre si e como se relacionam com a matemática escolar. Pretende assim proporcionar aos futuros professores uma visão ao mesmo tempo ampliada e panorâmica da disciplina, que os permita identificar relações e conexões entre os assuntos e entre esses e a matemática a ensinar na escola básica.

> Eu, de modo algum, dirijo-me a principiantes, e sim tomo como certo que todos vocês estão familiarizados com os elementos fundamentais dos principais campos da matemática. [...] O meu objetivo consiste sempre em mostrar ao leitor *as conexões entre problemas de diferentes campos*, algo que não é suficientemente revelado nos cursos em geral, e mais especificamente, enfatizar a relação desses problemas com os da matemática escolar. (Klein, 2010, pp.1,2, grifo como no original, tradução nossa)

Para Klein, é fundamental que o professor esteja familiarizado com as questões e as dificuldades envolvidas na estrutura do assunto que ensina para que possa conduzir seus alunos à aprendizagem. O autor defende que o saber de conteúdo necessário para o ensino na escola básica é particular e deve oferecer ao professor uma visão da Matemática que não observa os assuntos pontual ou isoladamente, mas que permita percebê-los de forma abrangente e articulada, reconhecendo suas complexidades epistemológicas e seu desenvolvimento histórico.

Matemática elementar e translação histórica

Klein não entende a matemática elementar como uma matemática mais "fácil" ou como uma "versão simplificada" da Matemática superior. O autor identifica como *matemática elementar* aquela que congrega as partes essenciais que encerram a capacidade de sustentar e de estruturar a Matemática. Assim, *não há diferença de valor entre o que é elementar e o que é superior* – são partes que se fundem e se articulam compondo, com a mesma importância, a Matemática como ciência (SCHUBRING, 2003). Klein enfatiza a importância fundamental de um *metassaber*, isto é, um *saber sobre o saber*.

A noção de *matemática elementar* também é fundamental para a percepção, nos termos de Klein, da relação entre a matemática escolar e a matemática universitária. Klein não se alinha com o entendimento de uma transposição vertical do conhecimento matemático produzido na academia para a escola, à qual caberia apenas o papel passivo de receber e difundir um conhecimento pronto, sem qualquer interferência em sua produção. Segundo Schubring (2012), Klein lida com a relação entre esses domínios do conhecimento admitindo a *elementarização* como um processo de *translação histórica*, por meio do qual, à medida que a matemática superior é mais bem compreendida, suas partes elementares vão se identificando e se organizando, permitindo o aprofundamento da compreensão e a difusão mais ampla de conceitos e estabelecendo assim as condições para a produção de novos conhecimentos. Desta forma, cabe à escola não só difundir o conhecimento elementar, como também contribuir com o próprio processo de *elementarização*, por meio da criação de categorias próprias para a seleção e adaptação de conteúdos e da avaliação das necessidades do ensino e da formação. Nessa perspectiva, a escola assume um papel de autoria e independência no próprio processo de produção do conhecimento.

REFERENCIAL METODOLÓGICO: *CONCEPTY STUDY*

Concept study (DAVIS, 2008, DAVIS & RENERT, 2009a , 2009b, DAVIS, 2010) se caracteriza como um modelo de investigação que se estrutura a partir de um estudo coletivo em que professores compartilham sua experiência e seu conhecimento acumulado com o objetivo de questionar e elaborar seus próprios conhecimentos de matemática com vistas ao ensino. Esse trabalho coletivo se desenvolve a partir da identificação, da interpretação, do questionamento, da proposição e da elaboração de imagens, metáforas, analogias, exemplos, exercícios, e aplicações que são evocadas (explicita ou implicitamente) sobre um determinado tópico de matemática analisado sob as perspectivas do ensino e da aprendizagem.

O entendimento de *concept study* se estabelece a partir da combinação de duas noções importantes e atuais nas pesquisas em educação matemática: (i) *concept analysis* – com foco na explicação de estruturas lógicas e associações que são inerentes a conceitos matemáticos e (ii) *lesson study* – estrutura colaborativa em que professores se empenham em melhorar a qualidade de sua prática letiva (DAVIS, 2010). Desta forma, *concept study* se orienta a partir de quatro pressupostos:

> (i) Conceitos matemáticos e concepções de matemática sempre estão relacionados;
> (ii) A partir seleção de interpretações particulares e da ênfase dada a elas em detrimento de outras, professores são participantes vitais na criação de uma matemática cultural[5];
> (iii) O conhecimento de matemática dos professores é tácito, mas elementos cruciais podem ser submetidos a uma investigação intencional em um arranjo coletivo;
> (iv) Conhecimentos coletivo e individual não podem ser dicotomizados – interpretações coletivas podem provocar impactos profundos no entendimento individual. (DAVIS, 2010, p.I-65, tradução nossa).

O autor destaca especialmente a relevância dos dois últimos pressupostos, indicando que, sob a organização coletiva, a lista de metáforas, analogias e imagens estabelecidas para determinado conceito é superior em riqueza às interpretações estabelecidas individualmente por um docente. Para Davis (DAVIS & RENERT, 2009a, 2009b, DAVIS, 2010), relativamente ao conhecimento de matemática do professor, mais importante do que a variedade de representações que caracterizam esse conhecimento é a capacidade de realizar e reconhecer possíveis associações que podem emergir de forma explicita ou implícita entre essas representações. Tais associações ficam iminentes e são fundamentais no exercício da prática letiva.

Para Davis (2010), um *concept study* permite uma (*re*)construção conceitual estabelecida a partir de um conhecimento já formado. Esse processo é identificado pelo autor como "*substruct*".

> *Substruct* significa construir algo abaixo. Na construção industrial, *substruct* significa reconstruir um prédio sem demoli-lo – e, idealmente, sem interromper seu uso. Da mesma forma, em *concept studies*, os professores reestruturam seus conceitos matemáticos, às vezes radicalmente, enquanto continuam a utilizá-los no seu ensino. (DAVIS, 2010, p.I-66, tradução nossa)

Davis (2010) entende que, a partir desse processo, um *concept study* destaca e permite o acesso à profundidade e à amplitude de conhecimento dos professores sobre conceitos matemáticos sob uma perspectiva formal.

> A análise de um *concept study* tem caráter interpretativo, permitindo aos pesquisadores alcançar aspectos explícitos e implícitos do conhecimento de matemática do professor. Davis destaca que, "talvez, a mais importante implicação de *concept studies* seja a forma como evidenciam que o conhecimento de matemática do professor é certamente diferente do conhecimento matemático de outros profissionais" (DAVIS, 2008, p.90, tradução nossa).

Para a análise de um *concept study* é prevista a identificação de estágios de desenvolvimento. Esses estágios contemplam, de forma gradativa e encadeada a reflexão realizada pelo grupo. Segundo o autor, "apenas o primeiro estágio pode ser descrito como intencional, os demais são

---

[5] Para Davis & Renert, "[...] Professores têm participação vital na criação e possibilidades matemáticas. Longe de serem agentes periféricos que passivamente estabelecem resultados matemáticos, professores dão forma e substância a matemáticas culturais – isto é, não só à matemática formal, mas também a uma gama de aplicações culturalmente situadas, práticas e perspectivas que são habilitadas pela matemática formal e por outros modelos matemáticos de referência" (DAVIS & RENERT, 2009, p.41), tradução nossa.

emergentes, imprevisíveis, não planejados, decorrentes de interesses comuns, conhecimentos divergentes e encontros acidentais" (DAVIS, 2009b, p.38, tradução nossa). O primeiro estágio, denominado *percepções*[6], fica distinguido pela elaboração de uma lista que reúne as diversas imagens, metáforas, impressões que emergem da reflexão coletiva determinada a partir de uma questão disparadora.

Dentre os resultados observados no *concept study* descrito em (DAVIS, 2010), o autor destaca a transformação na percepção da matemática por partes dos professores envolvidos, que passam a entender a disciplina sob uma perspectiva não platônica. Em relação a esses professores, segundo Davis, é possível identificar o desenvolvimento da habilidade coletiva de investigar e reestruturar seus conhecimentos. Para Davis & Renert (2009b),

> "[...] Professores têm participação vital na criação e possibilidades matemáticas. Longe de serem agentes periféricos que passivamente estabelecem resultados matemáticos, professores dão forma e substância a matemáticas culturais – isto é, não só à matemática formal, mas também a uma gama de aplicações culturalmente situadas, práticas e perspectivas que são habilitadas pela matemática formal e por outros modelos matemáticos de referência." (DAVIS & RENERT, 2009b, p.41, tradução nossa)

A proposta de desenvolvimento de um *concept study* apresentou-se como adequada, fundada sobre a concepção de uma investigação conceitual (c*oncept analysis*), com atenção à dimensão pedagógica do saber de conteúdo do professor e estabelecida a partir de um estudo coletivo (*lesson study*).

RESULTADOS DO ESTUDO COLETIVO

Com o objetivo investigar em que medida reconhecer e compreender aspectos elementares nos conteúdos ensinados no ensino básico (no sentido de Klein) contribui para a constituição do saber pedagógico de conteúdo do professor de Matemática, foi desenvolvido um *concept study* envolvendo 15 professores de matemática com experiência profissional que variava de 1 a 20 anos de atuação em sala de aula da escola básica. O estudo se deu ao longo do desenvolvimento da disciplina Tópicos em Ensino de Matemática do curso de Especialização em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, ao longo do segundo semestre de 2011. Reconhecendo o inquestionável valor *elementar* do tema números e a atenção recebida em investigações em ensino de Matemática (e.g. CONFREY et al, 2009), números racionais foi o tema escolhido para o estudo.

Segundo a metodologia de análise de um *concept study*, foram distinguidos 3 estágios ao longo do estudo realizado: Percepções, Estruturas e Panoramas. O primeiro estágio, o único intencional, se estabeleceu a partir da elaboração de uma lista que reuniu as diversas imagens, metáforas, impressões, emergentes da reflexão coletiva determinada a partir da questão disparadora: *O que é fundamental no que ensinamos sobre números racionais na escola básica?* (Tabela 1) Neste estudo, outros dois estágios foram identificados a partir da complexidade das articulações estabelecidas entre o tema central que amparou a discussão (números racionais) e outros assuntos e ramos da Matemática.

PERCEPÇÕES
▪ Relacionar parte e todo em situações diversas.
▪ Compreender a ideia de unidade
▪ Operações com frações

[6] No original, *realizations*.

▪ Igualdade x equivalência
▪ Representação da reta numerada
▪ Diversos *significados* de frações – fração como número, como relação parte/todo, como razão e como divisão.
▪ Mostrar ao aluno que um mesmo número racional tem diversas representações – *representação*
▪ *Comparação* de números racionais na <u>forma decimal</u>
▪ *Comparação* de números racionais na <u>forma fracionária</u>
▪ Dar *significado* aos números racionais
▪ Reconhecer os números racionais na *forma percentual*
▪ Reconhecer os números inteiros como racionais
▪ Aproximações
▪ *Dízimas* – Em particular o caso do "0,999..."
▪ "Saber que dados dois números racionais sempre é possível determinar um outro entre eles." – Densidade dos racionais.

Tabela 1: Quadro de *percepções* do estudo.

A composição da lista de *percepções*, que marca de forma intencional o início do estudo, foi estabelecida a partir de uma longa discussão do grupo, que teve como forte referência a experiência da sala de aula. Ficou evidente que para compor a lista, os professores se pautaram mais no contexto da sala de aula, em sua prática, do que na identificação da relevância do tema para a Matemática. Por exemplo, a discussão que determinou a inclusão do item "compreender a *ideia de unidade*" foi pautada no reconhecimento do grupo da dificuldade dos estudantes para resolver problemas em que a unidade corresponde a um conjunto com mais do que um elemento. Esses problemas são encontrados com alguma frequência nos livros didáticos da escola básica. Como ilustração, considera-se a situação em que duas pizzas são divididas em quatro partes cada uma e que sejam consumidas seis dessas partes. A quantidade consumida de pizza pode ser interpretada como 6/4 de *uma* pizza ou como 6/8 ou ¾ da quantidade total, ou seja, de duas pizzas, como ilustrado na figura 1. Assim, a partir da identificação da "unidade", a fração correspondente à parte consumida varia, indicando dois números diferentes, ainda que a quantidade correspondente seja a mesma.

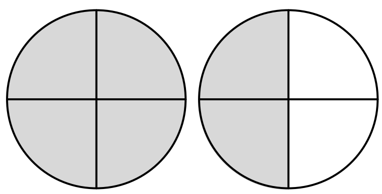

Figura 1: Representação da quantidade de pizza consumida.

Não foi indicado nessa discussão qualquer reconhecimento da importância da unidade sob a perspectiva da Matemática em contextos mais formais, por exemplo, para a própria concepção de número racional ou para a definição de inverso multiplicativo. O único item cujo reconhecimento do valor para a Matemática ficou explicito, e foi preponderante na indicação para a composição da lista, foi o que observa a densidade do conjunto dos números racionais. Ainda que alguns professores não associassem a propriedade à definição de conjunto denso, todos concordavam que observar que "*dados dois números racionais sempre é possível determinar um outro entre eles*" era essencial para aprendizagem sobre números racionais.

À medida que o estudo se desenvolveu, nos estágios seguintes, *Estruturas* e *Panoramas*, foram sendo reveladas articulações entre conteúdos que caracterizam a formação matemática acadêmica e a perspectiva da abordagem da matemática na escola básica. Por exemplo, no estágio *Estruturas*, caracterizado no estudo pela articulação de aspectos matemáticos do conceito de número racional que têm característica estruturante na compreensão do assunto, destaca-se o questionamento sobre equivalência e igualdade no âmbito das frações. Nessa etapa, a partir da indagação "Qual é o certo, ½ é igual ou é equivalente a 2/4?", o grupo revisitou as definições de relação de equivalência e de número racional. Essa questão surgiu como uma dúvida importante que atingia a prática dos professores envolvidos e, cuja resposta, não era evidente nem segura para a grande maioria. Neste estágio do estudo, foi verificada uma inflexão significativa nos processos e critérios de buscas por respostas adotados pelos professores participantes. Até então, eles vinham usando como principais referências teóricas sobre matemática os próprios livros didáticos da escola básica. A busca por respostas para as dúvidas sobre equivalência de frações exigiu dos professores a consulta a livros acadêmicos ou dirigidos a professores. Ficava claro que, ainda que a formalização desses conceitos não seja apropriada para o ensino básico, o seu conhecimento é fundamental para capacitar o professor para o ensino de frações, números racionais e, particularmente, para responder corretamente à pergunta que mobilizou o grupo. Essa etapa evidenciou ao grupo que, para ensinar, o conhecimento de matemática do professor precisa ir além do que está nos textos didáticos da escola básica e que, por outro lado, não pode estar desprendido dessa realidade.

O terceiro estágio identificado no estudo, *Panoramas*, foi caracterizado especialmente a partir de dois aspectos:

(i) **A forma como as questões passaram a ser investigadas revelou explicitamente o reconhecimento de um** meta-sabe**r do professor**. Nesse estágio os professores passaram a questionar suas certezas. Por exemplo, *a certeza de que todo número racional admite duas representações, na forma de fração e na forma de expansão decimal*. Os professores do grupo reconheceram que se tratava de uma certeza constituída durante seus próprios estudos *no ensino básico e não na formação universitária*. Segundo nossa análise dos resultados do estudo, essa constatação foi associada à indicação da *dupla descontinuidade* identificada por Klein (2010). Mais os professores foram além e indagaram: *O que garante esse resultado?* Ficava assim evidenciada uma nova forma de percepção do conteúdo: não basta *saber*, é necessário *compreender como esse saber se constitui, qual sua natureza e origem*, bem como compreender em que sentido e em que medida esse saber é relevante para a sala de aula. Em nossa análise identificamos esta perspectiva como um processo de construção de meta-saberes pelos professores participantes.

(ii) **As conexões matemáticas estabelecidas, ampliadas em alcance e complexidade, não se limitaram ao contexto de números racionais**. Por exemplo, a discussão alcançou grandezas incomensuráveis e a construção dos números reais. Em particular, a partir desse momento, as referências para a discussão passaram a ser exclusivamente textos acadêmicos, evidenciando o reconhecimento de que esses resultados, ainda que admitissem uma abordagem própria para o ensino básico, exigiam e se estabeleciam sob o rigor da formalização Matemática.

CONCLUSÕES

Como resultados do estudo destacamos o potencial da metodologia *concept study* para investigar o conhecimento de matemática dos professores de forma articulada com a sua prática. Mais ainda, acreditamos que essa metodologia se revelou potencialmente promissora para a formação continuada do professor, oportunizando a reconstrução conceitual de forma articulada com a prática. Essa constatação fica evidenciada no depoimento de um dos professores do grupo, que estava entre aqueles com maior tempo de experiência em sala de aula:

> "Realmente, professora, gosto muito dos nossos encontros! O tempo passa tão depressa! **Acrescento vários conhecimentos aos meus e refaço outros**! Saio pensando em tantos assuntos, que demoro um tempão para querer ligar o rádio do carro, prefiro ficar refletindo sobre tudo que foi conversado em sala de aula!" (grifo nosso)

Em particular, destacamos que o estudo alcançou a dupla descontinuidade, identificada por Klein, a partir de duas perspectivas importantes: Por um lado, permitiu constatar a persistência da dupla descontinuidade na formação do professor até os dias de hoje, revelando que esta parece ainda estar distante e desconectada do trabalho de ensinar matemática na escola básica. Por outro lado, o estudo revelou que um *concept study* oferece condições para intervir positivamente neste cenário, promovendo a reconciliação dessa ruptura no que depende da iniciativa do professor. A ilustração desses dois aspectos pode ser observada em um único resultado extraído da investigação realizada. Na etapa inicial do estudo coletivo, os professores que compuseram o grupo buscavam como referência para amparar a discussão e esclarecer os questionamentos emergentes, quase que exclusivamente, livros didáticos com que trabalhavam, nunca textos acadêmicos. Por exemplo, para estabelecer a diferença entre os conceitos de razão e proporção ou o conceito de equivalência. À medida que o estudo se desenvolveu, essa conduta foi alterada.

O estudo sugere que, de fato, os exercícios de questionar, observar e investigar coletivamente o conteúdo de matemática do ensino básico, visando identificar aspectos *elementares* desses conteúdos (no sentido de Klein) relacionando-os às estruturas fundamentais da Matemática, determinou um processo de *reconstrução* do *saber pedagógico de conteúdo* dos participantes. Essa reconstrução determina um meta-saber, alcançando uma perspectiva prática conceitual e uma perspectiva subjetiva. Por um lado, amplia o conhecimento do professor sobre o conteúdo sem perder e vista a dimensão da sua prática e, por outro, fortalece a autoestima do professor, que reconhece a especificidade e a importância do seu saber.

Finalmente, destacamos que, ainda que o estudo tenha sido gratificante em relação à observação de resultados positivamente potenciais para a formação do professor em relação ao desenvolvimento dos saberes docentes, ele não oferece oportunidade de acompanhamento do impacto desses resultados na sala de aula e na aprendizagem dos alunos acompanhados pelos professores envolvidos. Este pode ser um tema para futuras pesquisas em continuidade a esta.

Referências

[1] Ball, D.L. (1988) The subject matter preparation of prospective mathematics teachers: Challenging the myths. National Center for Research on Teacher Education, College of Education, Michigan State University, 1988. Disponível em: http://ncrtl.msu.edu/research.htm

[2] Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? Journal of Teacher Education, 59 (5), 389-407.

[3] Ball, D., Charalambous, C.; Thames, M. & Lewis, J. (2009a). *Teacher knowledge and teaching: Viewing a complex relationship from three perspectives*. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds), Proceedings of 33rd Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education (vol. 1, pp. 121–150). Thessaloniki, GR: PME

[4] Ball, D. et al. (2009b). Mathematical Knowledge for teaching: Focusing on the work teaching and its demands. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds), Proceedings of 33rd Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education (vol. 1, pp. 133–139). Thessaloniki, GR: PME.

[5] Davis, B. (2008). *Is 1 a prime number? Developing teacher knowledge through concept study*. Mathematics Teaching in the Middle School (NCTM), 14(2), 86-91.

[6] Davis, B. & Renert, M. (2009a). *Concept Study as a response to algorithmetic*. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds), Proceedings of 33rd Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education (vol.1, pp.126–132). Thessaloniki, GR: PME.

[7] Davis, B., & Renert, M. (2009b). *Mathematics for teaching as shared, dynamic participation*. For the Learning of Mathematics, 29(3), 37-43 (Special Issue, guest edited by J. Adler & D. Ball).

[8] Davis, Brent. (2010). *Concept Studies: Designing settings for teacher's disciplinary knowledge*. Proceedings of the 34th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Minas Gerais, Brasil, 1, pp.63-78.

[9] Kilpatrick, Jeremy. (2008). *A Higher Standpoint*. Proceedings ICME 11, no prelo.

[10] Klein, Felix. (2010). Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Aritmetics, Algebra , Analysis. USA: Breinigsville.

[11] Klein, Felix. (2009). Matemática de um Ponto de Vista Superior. Volume I. Parte I Aritmética. SPM, Lisboa.

[12] Klein, Felix. (2010). Matemática de um Ponto de Vista Superior. Volume I. Parte II Álgebra. SPM, Lisboa.

[13] Klein, Felix. (2011). Matemática de um Ponto de Vista Superior. Volume I. Parte III Análise. SPM, Lisboa.

[14] Krauss, S., Brunner, M., Kunter, M., Baumert, J. , Blum, W., Neubrand, M. ; Jordan, A. (2008) *Pedagogical content knowledge and content knowledge of secondary mathematics teachers*. Journal of Educational Psychology, Vol 100(3), Aug 2008, 716-725.

[15] Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, Vol.15, pp.4-14.

[16] Shulman, L. (1987). *Knowledge and teaching: foundations of the new reform*. Havard Educational Review, 1997, v. 57, pp. 1–22.

[17] Schubring, Gert. (1999). O Primeiro Movimento Internacional de Reforma Curricular em Matemática e o Papel da Alemanha: um estudo de caso na Transmissão de Conceitos. Zetetiké. v.7. no 11. Pr .29-50. UNICAMP. Campinas, Brasil.

[18] Schubring, Gert. (2003). *Análise Histórica de Livros de Matemática*. Notas de Aula. Campinas: Editora Autores Associados.

[19] Schubring, Gert. (2013, a aparecer). *A Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior: Felix Klein e a sua Atualidade*. In Roque, T, & Giraldo, V. (eds.), O Saber do Professor de Matemática: Ultrapassando a Dicotomia entre Didática e Conteúdo. Rio de Janeiro: Ciência Moderna.