SOBRE A MATEMÁTICA DAS MEDIDAS NO PLANETA TERRA: DOS GREGOS ÀS NOVAS TECNOLOGIAS

José Antonio Salvador

João Carlos Vieira Sampaio

DM-CCET-UFSCar

salvador@dm.ufscar.br, sampaio@dm.ufscar.br

Neste ano Internacional da Matemática do Planeta Terra, que visa entre outros objetivos despertar para o público o papel essencial das ciências matemáticas para enfrentar os desafios do nosso planeta, propomos um trabalho que aborda didaticamente alguns aspectos históricos de medições e cálculos realizados na Terra ao longo dos tempos. Desde os primeiros homens que habitaram nosso planeta, se contavam os animais, objetos, moedas etc., e os humanos aprenderam a representar as quantidades por números, fazendo com eles cálculos e jogos mágicos. Contavam e mediam distâncias, perímetros, áreas e ângulos, e calculavam o tamanho de terras. Provavelmente faziam rabiscos na areia para auxiliar na construção das edificações, usavam fios de prumo, níveis e esquadros, e ornavam paredes, tetos e vasos com padrões invejáveis. Observavam o passar dos dias e noites, os movimentos aparentes e os ângulos entre os astros, a variação da sombra solar e determinavam as horas e a variação das estações do ano. Neste trabalho exploramos as contagens, medidas envolvendo os cálculos primitivos e os realizados hoje com as novas tecnologias. As atividades didáticas que temos utilizado nas nossas disciplinas básicas da graduação em Matemática envolvendo o cálculo de distâncias com as unidades de medidas utilizadas desde o passo, o metro padrão medido com trena, o paquímetro, medidor de distância laser, Google Maps, Google Earth, etc., tem se mostrado bastante motivadoras. Na descrição histórica e matemática dos eventos de medições, chama a atenção o emprego de conceitos elementares de geometria euclidiana e o surgimento da trigonometria. Métodos engenhosos, tais como os empregados por Eratóstenes de Cirene e Aristarco de Samos, foram baseados em conhecimentos de geometria euclidiana e construções geométricas por instrumentos clássicos, a régua e o compasso. Com o advento da internet nos tempos atuais, experimentos como o de Eratóstenes tornam-se operacionalmente viáveis, através de comunicação à distância entre estudantes de localidades distantes entre si, realizando experimentos de medição simultâneos e comparando os resultados.

Palavras-chave: *medidas, geometria, trigonometria, planeta Terra, história da geometria.*

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho mostramos cenários que nos levam ao cotidiano, desde as sociedades antigas, resgatando métodos matemáticos utilizados para orientação, localização e determinação das medidas de ângulos, distâncias ou alturas de objetos inacessíveis, áreas das regiões habitadas ou exploradas, bem como experimentamos novas abordagens, integrando-as com as ferramentas tecnológicas e a matemática envolvida para atingir a aprendizagem.

A faculdade de pesar, medir e contar permite ao espírito humano livrar-se das aparências sensoriais, já afirmava Sócrates no século IV a. C. (Silva, 2012). Mesmo quem nunca teve a oportunidade de frequentar uma escola se depara com situações em que se necessita fazer medidas. Medir é comparar uma grandeza com outra, mas é necessário ter um único termo de comparação para todas as grandezas de mesma espécie. Este processo levou séculos para ser uniformizado com o SI (Sistema Internacional de Unidades).

Da medição da Terra (geo = terra, metrein = medição) originou a palavra Geometria que é utilizada desde os povos antigos. Historiadores atribuem a criação da geometria aos egípcios e caldeus que mediam e calculavam distâncias entre dois pontos, empregavam algumas fórmulas para a determinação das dimensões de terrenos, cálculo de áreas, volumes etc., de grande importância para a construção de templos e pirâmides, para a astronomia, e como auxílio à navegação e à fabricação de ferramentas e utensílios.

No mundo escolar o cálculo de perímetros, áreas e volumes, geralmente parece algo em que só se aplicam fórmulas, e muitas vezes os professores se esquecem de que temos o mundo todo ao redor para observar, estimar, medir e calcular. E nem sempre as regiões a serem medidas são regulares como aparecem nos livros escolares. Neste sentido, propomos atividades que julgamos mais interessantes para os estudantes fazendo-os estimar, medir e calcular comprimentos, áreas e volumes, desde os instrumentos antigos e simples até os mais recentes, explorando a matemática envolvida em cada um deles.

Sabemos que os primeiros conhecimentos e experiências das civilizações foram passados oralmente de pai para filhos por muitos séculos até o surgimento dos registros. Os povos egípcios sabiam calcular a área de um círculo; de triângulos e retângulos; o volume do cilindro reto, do tronco de pirâmide de base quadrada e de prisma como os containers (paralelepípedos) de cereais etc. e também utilizavam um calendário solar para marcar o tempo. Os mais antigos registros de problemas matemáticos relacionados aos cálculos de medidas de áreas e volumes encontram-se nos papiros como os de Ahmes (Rhind) e também nos tabletes babilônicos.

O sistema de medidas que aparece no papiro remonta-se há alguns séculos a. C. e era adequado para medir comprimentos, áreas, volumes e tempo. O meh (côvado ou cúbito) era a unidade básica de medida de comprimento, medida desde o cotovelo até a ponta do dedo médio, hoje equivale a 52,4 cm. Ainda usavam as suas subdivisões (1/7 meh = chesep, 1/20 meh = dedo) e seus múltiplos (1,5 meh = nebiu, 100 meh = khet, 20000 meh = iteru)

A toda região ou figura plana está associada uma área. O problema 51 do papiro mostra o cálculo da área de um triângulo isósceles, como sendo o produto da metade da medida da base pela da altura. O problema 52 mostra o cálculo da área do trapézio isósceles.

Além de resgatar os métodos antigos, hoje podemos construir planilhas em escalas computando desde as distâncias nanométricas às astronômicas, bem como a exploração das unidades de medidas e escalas quando se leva em consideração regiões da terra como áreas de lotes, terrenos, fazenda, cidades, municípios, estados, países e a própria terra ou os planetas do sistema solar. Para medir e calcular nos dias de hoje podemos usar as ferramentas tecnológicas como medidor a laser, GPS, Google Maps, Google Earth, etc. e discutir a matemática envolvida.

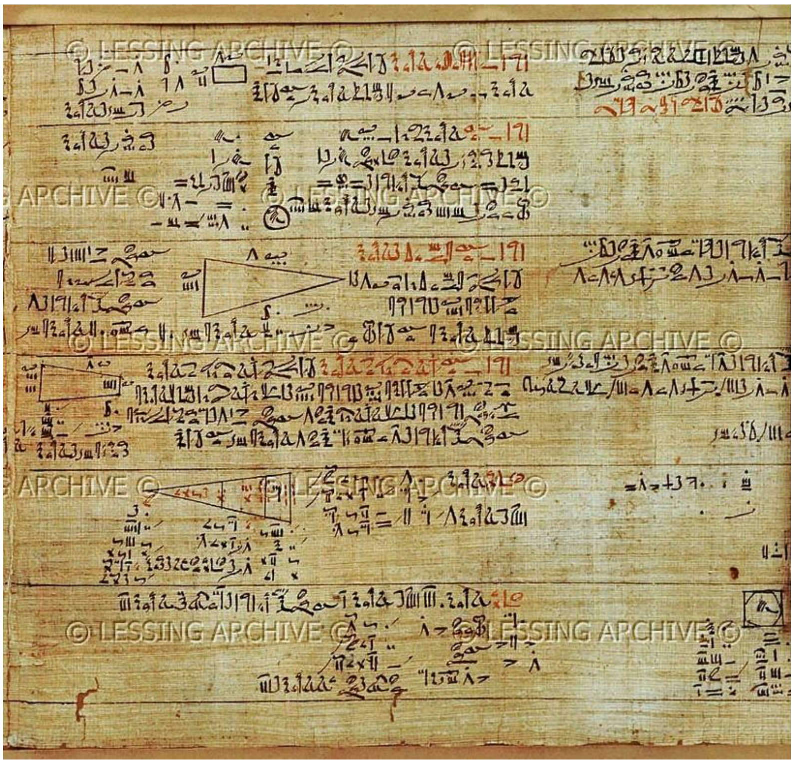

Figura 1: Fragmento do Papiro de Ahmes (Rhind) – Museu de Londres. Fonte: http://www.lessing-photo.com/p3/030102/03010244.jpg

2. MEDINDO AREAS NA SUPERFÍCIE DA TERRA

A medida de um comprimento e o cálculo da área de uma região na superfície terrestre é muito útil inclusive no processo de ensino e aprendizagem da matemática básica. Para obter a medida da área de uma região, já se utilizou unidade de medida agrária com base no tempo de trabalho humano, na quantidade de grãos semeados, na produção da região, etc. Ainda é comum medir os lados de uma região poligonal utilizando-se cordas, correntes, trenas, etc., para o cálculo de sua área, muitas vezes dividindo-a em regiões poligonais menores com áreas mais fáceis de serem calculadas. E com as novas tecnologias como podemos realizar tais medidas com precisão cada vez maior?

2.1 Áreas de regiões terrestres

Para babilônios, gregos e árabes o número também era associado ao comprimento. A multiplicação de um comprimento por outro era uma aplicação tal como a de calcular a área de uma região da terra a ser plantada com cevada, ocupada por um acampamento de uma tribo ou do exército inimigo.

Para obter uma aproximação para a área A de uma região quadrilátera com lados de medidas a, b, c e d unidades de comprimento, os egípcios antigos calculavam o produto das médias aritméticas das medida de lados opostos: $A = \left(\frac{a+d}{2}\right) \cdot \left(\frac{b+c}{2}\right)$ unidades quadradas.

Heron de Alexandria obteve a área de um triângulo de lados a, b e c em função do semi-perímetro p e das medidas de seus lados, $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Usando tal fato**,** podemos decompor qualquer polígono subdividindo-o em triângulos para calcular a sua área.

Quadraturas de figuras curvilíneas, como o círculo, ou figuras limitadas por arcos de curvas desafiavam os geômetras antigos. Hipócrates de Chios, cerca de 440 a.C., realizou as primeiras quadraturas com as lúnulas, regiões limitadas por dois arcos de círculos, semelhante à lua no seu período crescente ou minguante.

A quadratura do círculo obtida pela média da sequência de polígonos regulares inscritos e circunscritos de 6, 12, 24, 48, e 96 lados, foi idealizada por Antifon por volta de 430 a.C. e calculada por Arquimedes, obtendo uma boa aproximação para o número π (pi): 223/71 < π < 22/7.

O problema é que não se conhecia o conceito de limite como hoje, e essa sequência na época não pode ser concluída, dando origem ao método da exaustão, de Eudoxo, uma das contribuições gregas para o Cálculo Diferencial e Integral. O argumento utilizado por Arquimedes era que se uma quantidade não podia ser nem maior, nem menor, que uma segunda quantidade de mesma natureza, tinha que ser igual à esta segunda (reductio ad absurdum).

A área do círculo pode ser aproximada como na Figura 2, por uma sequência de áreas A_n, sendo A_n a soma das áreas de n triângulos isósceles, de lados iguais ao raio r e base uma corda de comprimento b_n subtendida por um ângulo central $\alpha_n = 360° / n$. As cordas sobre cada metade do círculo são "esticadas" e colocadas com as bases dos triângulos se alternando e encaixando-se formando um retângulo de comprimento aproximadamente πr (tomando n suficientemente grande) e largura r de modo a obter a área equivalente à do círculo quando as bases dos triângulos são cada vez menores.

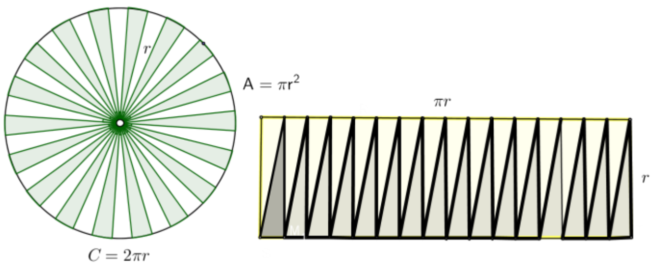

Figura 2: Área do círculo aproximada por uma soma de áreas de triângulos isósceles.

A área do círculo também pode ser obtida decompondo-o em anéis cada vez menores e "esticando-os" um acima do outro formando uma figura aproximada por um triângulo retângulo tendo como base o comprimento do círculo $2\pi r$ e altura igual ao raio r.

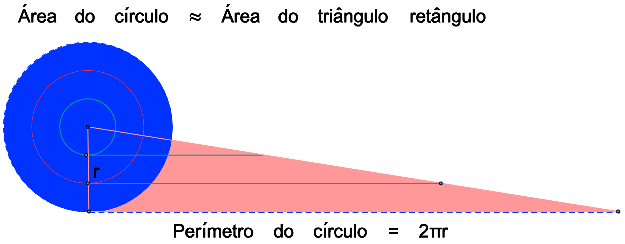

Figura 3: Área do círculo aproximada por uma soma de áreas de anéis circulares estreitos.

Embora resgatemos os primeiros métodos de cálculos de comprimento, área e volume, não devemos ignorar que num mundo em que as informações são acessíveis a todo momento com um simples clique de mouse, as tecnologias disponíveis mudam o nosso modo de viver. As rotinas de sala de aula tendem (ou deveriam) incorporá-las cada vez mais, de um modo crítico e consciente, pois elas influenciam consideravelmente nas formas de pensar e de aprender.

O cálculo aproximado da área de uma figura irregular pode ser feito pelo método da exaustão, quadriculando uma região que a contem ou inserir a sua imagem no GeoGebra[1] como pano de fundo e gerar um polígono que a rodeia, ou utilizar a própria malha do software. De fato, se contarmos o número de quadrados inteiros que preenchem o interior da figura obtemos o valor aproximado da área por falta, enquanto que se contarmos o número de quadrados inteiros que cobrem toda essa figura obtemos o valor aproximado da área por excesso. Assim uma aproximação melhor do valor da área da figura pode ser determinado pela média aritmética dos dois valores encontrados, por falta e por excesso.

Interessante observar também que Nicole Oresme imaginou que se um corpo move com velocidade constante v ao longo de um período de tempo t, a área do retângulo de lados v e t representa a distância percorrida pelo corpo.

Bonaventura Cavalieri estabeleceu no século XVII a teoria dos indivisíveis, um princípio básico para o cálculo de áreas ou de volumes que presentemente é um teorema do Cálculo Integral.

A área da região limitada por uma parábola cortada por uma corda qualquer, igual a 4/3 da área do triângulo que tem a mesma altura e que tem a corda como base foi obtida por Arquimedes. Ele gerou também uma soma com infinitos termos, conseguindo provar rigorosamente o seu resultado, evitando, com o método da exaustão, a dificuldade com a quantidade infinita de parcelas. Este é o primeiro exemplo conhecido de soma infinita que foi resolvido.

Considere dois sólidos de mesma altura como o constituído de dois blocos inteiros de folhas de papel A4, fazendo num deles um cisalhamento. Como eles geram áreas iguais em qualquer uma de suas secções transversais (uma folha) e possui a mesma altura os volumes são iguais. Daí, concluiu-se que o volume de um prisma é igual à área da base vezes a altura.

1 http://www.geogebra.org/cms/en/

Arquimedes encontrou também o volume da esfera e a área da superfície esférica, o volume do cone e a área da superfície cônica, a área da região limitada por uma elipse, o volume de um parabolóide de revolução e o volume de um hiperbolóide de revolução, considerando somas de um número infinito de parcelas.

Arquimedes sabia que o volume do cone era igual a um terço do volume de um cilindro com a mesma altura e mesma base. Pelo princípio de Cavalieri verificamos que o volume da esfera de raio R é igual ao volume de um cilindro reto de mesmo raio R e altura $2R$ menos o volume de dois cones de raio e altura iguais a R.

Os instrumentos de medidas de comprimento e ângulos evoluíram desde objetos simples e os membros do corpo humano (geralmente dos reis) cúbito, braça, palmo, polegada, pé, jarda, régua, trena, paquímetro, micrômetro, medidor a laser, altímetro, sextante, astrolábio, transferidor, teodolito, taqueômetro, GPS, Google Earth e os softwares de geometria dinâmica como o GeoGebra. Podemos explorá-los como ferramentas na exploração da geometria.

2.2 Áreas de regiões terrestres com as novas tecnologias

Atualmente, ferramentas interessantes são utilizadas para medir distâncias ou comprimentos com facilidade como o medidor a laser, GPS etc. e dai calcular a área de regiões. Para estimar distâncias e áreas podemos utilizar no ensino também o Google Earth. Realmente podemos traçar rotas e fazer o cálculo das distâncias, pontos equidistantes, lugares geométricos, perímetros e de áreas de regiões agrícolas ou urbanas. Se a figura for um polígono regular basta marcar os todos os seus vértices e realizar o cálculo. Caso a figura seja uma região irregular, mesmo não convexa, devemos marcar, além dos vértices das curvas que a delimitam, mais alguns pontos do contorno, de modo que se possa fazer uma interpolação dos dados.

Além disso, o teorema de Pick pode ser utilizado na exploração do cálculo da área de uma região. Inicialmente podemos apresentar uma malha quadriculada aos estudantes, pedir para desenharem um polígono simples qualquer ou construir um polígono num geoplano utilizando um elástico. Em seguida estimulá-los a contar os nós internos e os nós na fronteira da região limitada pelo polígono para ver se descobrem uma relação com a área da figura.

O teorema de Pick também pode ser usado numa região quadriculada pelo GeoGebra contando os nós internos I da malha e os nós da fronteira F de um polígono simples conforme a Figura 3 como o lago da UFSCar. De fato, um trabalho interessante é desde a localização de uma região da superfície da terra, como o lago da UFSCar com o Google Earth. Utilizando o GeoGebra, podemos fazer um PrintScr da imagem e salvá-la como um arquivo lago.JPEG. Em seguida, inserimos a imagem na janela gráfica do GeoGebra, colocando-a como imagem de fundo conforme Figura 4.

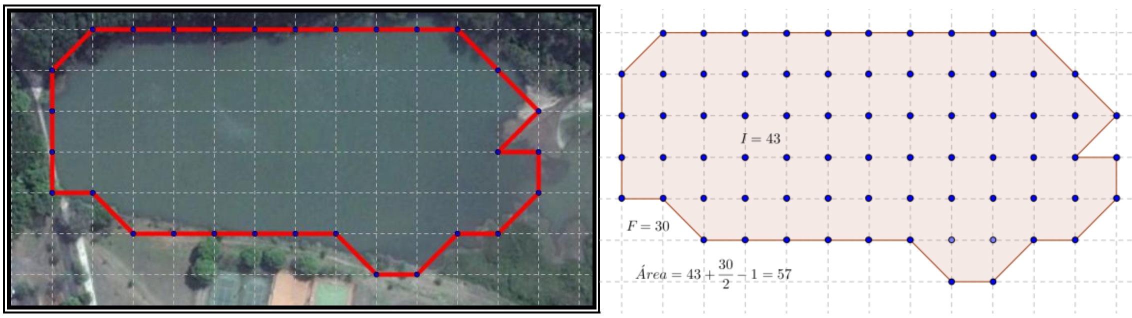

Figura 4: Área do Lago da UFSCar, com Google Earth, GeoGebra e preparação geométrica para uso do Teorema de Pick.

Com a ferramenta Polígono, contornamos a fronteira da imagem do lago, e calculamos a área do polígono irregular formado. Lembramos também de considerar a escala adotada entre a imagem e a figura real. É mais um recurso interessante para o cálculo de área de polígonos com vértices sobre pontos de interseção das retas de uma malha quadriculada, conforme Figura 4.

Denotando a área da região representada por A, o número de pontos interiores, nos cruzamentos da malha, por I, e o número de pontos na fronteira (borda) da região por B, o teorema de Pick permite calcular a área por:

$$A = I + \frac{B}{2} - 1$$

No caso do lago observamos (ou medimos um dos seus lados) em que cada unidade de distância entre os pontos vale 20 m de modo que a área de cada quadradinho da malha corresponde a 400 m^2, assim a área aproximada do lago é $A = 57 \times 400\ m^2 = 22800\ m^2$, quase um alqueire paulista, que vale 24200 m^2. Podemos ainda propor comparações da área do lago com a área total, ou calcular a área do cerrado que temos no campus e comparar com a área total.

2. EVOLUÇÃO DAS MEDIDAS DA TERRA E OS MÉTODOS MATEMÁTICOS APLICADOS

2.1 Meridiano Local e Latitude

Dentre as atividades propostas que resgatamos está a da obtenção do meridiano local e das medidas geográficas de latitude utilizando um gnomon e sombra solar, bem como a exploração de kits com uma simples laranja ou uma bola de isopor mostrando os métodos matemáticos envolvidos. O gnomon, um tipo de haste vertical fixada em uma superfície horizontal lisa do chão, é um dos mais antigos dispositivos usados na Grécia antiga e adotados pelos romanos e outros povos para marcar as horas do dia. Também é muito utilizado para determinar as alturas e distâncias de objetos inacessíveis. Obtemos o meridiano local, pela direção da bissetriz das sombras de mesmo tamanho ou da sombra mínima de um gnomon durante um dia e com isso obtemos também a rosa dos ventos conforme Figura 5 (Oliveira, 2012).

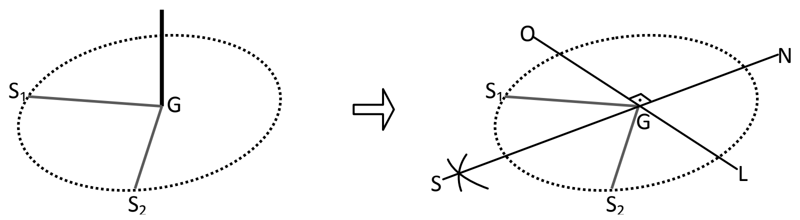

Figura 5: Determinação do Meridiano e Rosa dos Ventos

À noite também podemos explorar a direção do polo Sul celeste, cuja aproximação pode ser obtida pelo prolongamento 4,5 vezes o braço maior da constelação Cruzeiro do Sul ou pela observação do centro das órbitas aparentes das estrelas circumpolares.

A latitude local pode ser obtida também pela altura do polo celeste elevado, utilizando as estrelas circumpolares à noite ou nos dias dos equinócios, medindo o complemento do ângulo de altura máxima do sol, experiência fácil de ser realizada com os estudantes.

Também poderíamos pensar na bússola, utilizada até hoje, mas ela nos dá a orientação do pólo magnético, que nem sempre coincide com o geográfico. E então podemos utilizar um GPS (Global Positioning System) e orientar uma discussão para que os estudantes/professores possam adquirir não somente informações sobre o meridiano local, latitude, localização na superfície da terra, orientação, etc., mas explorando a matemática e envolvida no seu funcionamento, estimulando questionamentos, iniciativas, argumentações e as discussões. O GPS é um sistema de navegação por satélite que fornece a um aparelho receptor, entre outros dados, a qualquer momento, a posição do mesmo em qualquer lugar na Terra, assim como informação horária, quaisquer que sejam as condições atmosféricas, bem como a direção a ser tomada caso estejamos viajando, desde que o receptor se encontre no campo de visão de quatro satélites GPS. A determinação precisa dos locais com o GPS e o seu funcionamento pode ser explorada com os estudantes começando verificar a intersecção de figuras como 2 ou 3 círculos no plano, e em seguida, a intersecção de 4 esferas no espaço cujos centros são os satélites sincronizados emitindo sinais. De fato, se tivermos superfícies esféricas S_1, S_2, S_3 e S_4 cujos respectivos centros não coplanares são C_1, C_2, C_3 e C_4, podemos mostrar que existe único ponto P de interseção, ou seja, $P \in S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$. A exploração de tal atividade se faz necessária utilização das tecnologias atuais, calculadora ou computador, uma vez que são dadas as distâncias de cada satélite tomadas em relação ao nosso sistema ortogonal de coordenadas cartesianas

2.2 Medidas da Terra

Construindo instrumentos simples como um teodolito rudimentar ou um astrolábio os estudantes podem medir ângulos desde o chão ao topo de objetos inacessíveis em relação ao solo. E com isso, calcular as alturas de objetos como árvores, postes, mastros, obeliscos, antenas, refletores, torre de igrejas, edifícios, etc.

A exploração da determinação da altura dos astros e da latitude local com a utilização clássica da sombra de um gnomon, a altura máxima do sol (ou da altura da estrela sigma do oitante) num dia de equinócio, e utilizando as tecnologias disponíveis como também os softwares livres Celestia[2], Stellarium[3] etc. sempre procurando motivar os estudantes com a matemática envolvida.

A maioria dos povos antigos preferiam arranjos quadrangulares para as medidas agrárias. Entretanto, a obtenção do tamanho da terra por método indireto bem elaborado como o de Eratóstenes (276 –195 a. C.) foi um grande feito na época. Conhecendo a altura do sol ao meio dia no solstício de verão, na cidade de Alexandria e sabendo que neste dia a sombra estava na vertical em Siene (atual Assuã), pois a sua luz refletia no fundo de um poço d'água. Eratóstenes considerou três hipóteses importantíssimas na época.

H_1: Aceitar a forma geométrica esférica para a terra (que não era unânime na época);

H_2: Acreditar que os raios solares chegam paralelos à superfície da terra, pois ele imaginou o sol muito distante e muito maior do que a terra;

H_3: Supor que as cidades de Siene e Alexandria estavam sobre o mesmo círculo máximo, embora possamos ver que não estão exatamente sobre o mesmo meridiano local.

Com isso, mediu em Alexandria o tamanho da sombra de um gnomon e calculou o ângulo entre a direção dos raios solares e o gnomon obtendo 7^o 12´. Sabia também que a distância das cidades era cerca de 5000 estádios e, com uma simples regra de três, calculou com razoável precisão a circunferência da terra como sendo 250000 estádios, equivalente a cerca de 40000 km.

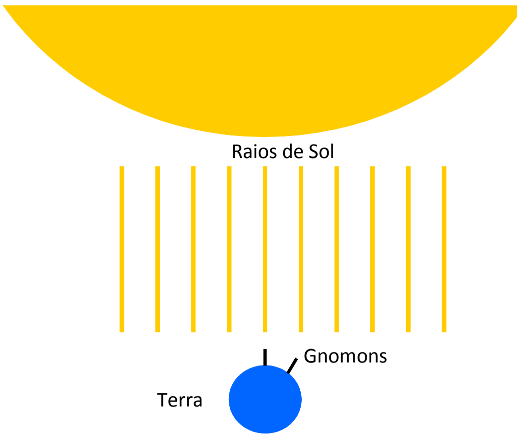

Figura 6: Cálculo do tamanho da Terra

A ideia adotada por Eratóstenes foi aperfeiçoada e muito usada ao longo dos séculos. De fato, com a mesma engenhosidade, Posidônio de Apaméia (135 a. C. 50 a. C.) usou um método ligeiramente diferente. Considerou as cidades de Rhodes e Alexandria, situadas mais ou menos no mesmo meridiano e a posição da estrela Canopus em vez do sol. Observou que em Rhodes Canopus só aparece no horizonte (atinge na realidade a altura cerca de $1°$ acima do horizonte) e

[2] http://shatters.net/celestia/
[3] http://www.stellarium.org/

que em Alexandria, ela aparece em uma altitude máxima de 7°30' acima do horizonte. Este ângulo também corresponde à diferença de latitudes entre as cidades. E conhecendo a distância entre as cidades ele calculou o tamanho da terra. Na época não levou em consideração a refração atmosférica e obteve um valor da circunferência da terra menor do que Eratóstenes. Parece que baseado neste valor é que Colombo convenceu os reis da Espanha de que alcançaria as índias, pensando que ela estaria mais próxima.

Outros métodos surgiram ao longo dos séculos como o cálculo da medida da terra olhando o horizonte do topo de uma montanha de altura conhecida D'Antonio (2012).

Também podem ser trabalhados com os estudantes de escolas distintas, ou considerar a distância de duas cidades no mesmo meridiano e a diferença de suas latitudes.

3. CONCLUSÃO

Concluímos que as experiências que temos feito explorando tais tópicos em vários cenários de aprendizagem tem se mostrado que a interação de ferramentas matemáticas clássicas e das tecnologias atuais são bastante receptivas e motivadoras para estudantes de graduação e para professores da rede básica de ensino nos nossos programas de Mestrado Profissionalizante enxergarem melhor algumas aplicações da matemática no nosso planeta.

Analogamente ao experimento de Eratóstenes, podemos utilizar uma bola de isopor, um mapa ou globo terrestre, as estrelas, e também com as novas tecnologias disponíveis como o Google Earth e GPS para motivar os estudantes pesquisarem.

Explorar conhecimentos de geometria euclidiana e construções, desenhos ou esquemas dos objetos a serem calculados usando instrumentos clássicos como a régua e compasso e os softwares modernos de Geometria Dinâmica como o GeoGebra.

Em todas as medidas obtidas e cálculos realizados discutimos as possíveis fontes de incertezas, pois os resultados dependem da precisão das medições. Pode-se aproveitar o resultado de cada grupo de estudantes/professores e, por exemplo, propor o cálculo da média aritmética dos resultados das medidas obtidas e levando-os a concluir que os resultados são satisfatórios.

REFERÊNCIAS

L. D'Antonio, *How to Measure the Earth,* in Mathematical Time Capsules, Mathematical Association of America, 2011.

González-Velasco, Enrique A., *Journey through Mathematics. Creative Episodes in Its History.* New York: Springer, 2010.

Jardine, D. & Shell-Gellasch, A., *Historical Modules for the Mathematics Classroom*, in Mathematical Time Capsules, *MAA, 2011.*

Oliveira, L., *Geometria da Observação dos Movimentos Aparentes do Sol e Aplicações*, Dissetação de Mestrado PPGECE, UFSCar, 2012.

Onuchic, L. R., *Novas Reflexões sobre o ensino–aprendizagem de matemática através da resolução de Problemas.* In: BICUDO, M. A e BORBA, M. (orgs) Educação Matemática – pesquisa em movimento, São Paulo, Editora Cortez, 2004.

Pólya, G., *Mathematical Methods in Science.* Washington: MAA, 1977.

Silva, I., *História dos pesos e medidas*, EDUFSCar, São Carlos, 2012.