NÚMEROS RACIONAIS – DISCUTINDO BARREIRAS ENTRE PEDAGOGIA E CONTEÚDO

Leticia Rangel

Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil

leticiarangel@ufrj.br

Victor Giraldo

Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil

victor.giraldo@ufrj.br

O objetivo desta oficina é discutir a relação entre o saber pedagógico de conteúdo (SHULMAN, 1986) e percepção de matemática elementar a partir das ideias de Felix Klein (KLEIN, 2010). A metodologia de trabalho tem como referencial a noção de Concept Study (DAVIS, 2010), estrutura de estudo coletivo que se estabelece em um cenário em que professores compartilham seus conhecimentos a partir da identificação, da interpretação, do questionamento, da proposição e da elaboração de imagens, metáforas, analogias, exemplos e aplicações que são evocadas (explicita ou implicitamente) sobre um determinado tópico de Matemática quando ensinado na escola básica. Seguindo esse modelo, propõe-se um processo de discussão coletiva em torno do tema números racionais, com o objetivo de evidenciar aspectos elementares desse conteúdo (no sentido de Klein) e contribuir para o desenvolvimento de meta-saberes dos professores em relação a números racionais.
Palavras-chaves: Saber Pedagógico de Conteúdo, Elementarização, Concept Study.

INTRODUÇÃO

O foco desta oficina é fundado em um desafio que marca a profissão docente e a formação do professor: *Como os professores podem seguir aprendendo com e a partir da prática?* Mesmo reconhecendo que os professores podem aprender a ensinar a partir da experiência, é certo que apenas a experiência não é suficiente. Dentre todos os conhecimentos necessários para a prática docente, focamos a atenção no *saber pedagógico de conteúdo* (Shulman, 1986), um conhecimento especial do professor que se constitui a partir do vínculo entre conteúdo e pedagogia. O saber pedagógico de conteúdo, também caracterizado por Shulman como um "amalgama entre conteúdo e pedagogia" (Shulman, 1987, p.8.), vai além do saber de conteúdo a ser ensinado por si só, alcançando a dimensão do saber da disciplina para o ensino. Esse saber, por sua própria natureza, não se esgota na formação inicial do professor, ainda que não prescinda de conhecimentos que o professor deve adquirir nesta etapa, e se amplia de forma constante e permanente ao longo da prática profissional. Entender como o saber pedagógico de conteúdo se desenvolve e determinar estratégias para que este seja apropriado pelos professores é a motivação de uma linha importante na pesquisa em Educação Matemática, que aponta para a necessária valorização da prática (Ball, 1988, Ball et al, 2008, Davis, 2010, Krauss et al, 2008, Doerr & Lesh, 2003, Pereira et al, 2013).

É certo que os professores iniciam a sua formação profissional trazendo ideias sobre o ensino da matemática formadas a partir de sua experiência como alunos do ensino básico. Essa experiência pessoal de aprendizagem da matemática também molda poderosamente seu entendimento de como a matemática deve ser ensinada e aprendida. Por outro lado, as pesquisas apontam que a formação inicial dos professores parece ainda estar distante e desconectada do trabalho de ensinar matemática na escola básica (Ball, 1988).

A observação do distanciamento entre a formação do professor e a prática letiva no ensino básico não é um episódio recente. Há cerca de um século, o matemático Felix Klein, em sua obra, hoje clássica, Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior[1], já apontava uma ruptura entre a matemática escolar, aquela ensinada nos sistemas de ensino básico, e a matemática acadêmica universitária. Klein identifica essa ruptura como uma dupla descontinuidade, que se estabelece na falta de conexão entre a matemática aprendida na escola básica e a matemática que determina os cursos de formação de professores.

> Os jovens estudantes universitários são confrontados com problemas que nada têm a ver com as coisas que estudaram na escola e, naturalmente, esquecem-nas rapidamente. Quando, depois de completarem o curso, se tornam professores confrontados com a necessidade de ensinar a matemática elementar na forma adequada ao grau de ensino, primário ou secundário, a que se dedicam, e como não conseguem estabelecer praticamente nenhuma relação entre esta tarefa e a matemática que aprenderam na universidade, facilmente aceitam o ensino tradicional, ficando os estudos universitários como uma memória mais ou menos agradável que não tem influência na sua forma de ensinar. (KLEIN, 2009, p.1)

Klein não entendia a matemática elementar como uma matemática mais fácil ou simplificada. Segundo Schubring (2003, 2013), para Klein, *matemática elementar* é aquela que congrega as partes essenciais que encerram a capacidade de sustentar e de estruturar a Matemática. Sob essa perspectiva, não há diferença de valor entre o que é elementar e o que é superior – são partes que se fundem e se articulam compondo, com a mesma importância, a Matemática como ciência. Em relação ao saber do professor, Klein enfatiza a importância fundamental de um *meta-saber*, isto é, um *saber sobre o saber*. Assim, é fundamental que o professor esteja familiarizado com as questões e as dificuldades envolvidas na estrutura do assunto que ensina para que possa conduzir seus alunos à aprendizagem. O autor defende que o saber de conteúdo necessário para o ensino na escola básica é particular e deve oferecer ao professor uma visão da Matemática que não observa os assuntos de forma pontual nem isolada, mas que permita percebê-los de forma abrangente e articulada, reconhecendo suas complexidades epistemológicas e seu desenvolvimento histórico.

Aa metodologia *concept study* (Davis, 2008, 2010, Davis & Renert, 2009a, 2009b) se apresenta como um recurso potencialmente importante para promover o desenvolvimento do saber pedagógico de conteúdo do professor de forma articulada com a sua prática. Um *concept study* é uma estrutura de estudo coletivo em que professores compartilham sua experiência e seu conhecimento acumulado com o objetivo de questionar e elaborar seus próprios conhecimentos de matemática com vistas ao ensino. Segundo Davis e seus colaboradores, essa metodologia encerra a concepção do conhecimento de matemática para o ensino sob uma perspectiva dinâmica e fluente. Um *concept study* se desenvolve a partir da identificação, da interpretação, do questionamento, da proposição e da elaboração de imagens, metáforas, analogias, exemplos, exercícios, e aplicações que são evocadas (explicita ou implicitamente) sobre um determinado tópico de matemática analisado sob as perspectivas do ensino e da aprendizagem. Assim, esse modelo permite uma (*re*)construção conceitual estabelecida a partir de um conhecimento já formado. Esse processo é identificado pelo autor como "*substruct*".

[1] Na versão original, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, publicada em 1908 e 1909 – Obra em três volumes que traz lições de matemática elaboradas por Felix Klein para professores das séries finais do ensino básico.

> *Substruct* significa construir algo abaixo. Na construção industrial, *substruct* significa reconstruir um prédio sem demoli-lo – e, idealmente, sem interromper seu uso. Da mesma forma, em *concept studies*, os professores reestruturam seus conceitos matemáticos, às vezes radicalmente, enquanto continuam a utilizá-los no seu ensino. (DAVIS, 2010, p.I-66, tradução nossa)

O entendimento de *concept study* se estabelece a partir da combinação de duas noções importantes e atuais nas pesquisas em educação matemática: (i) *concept analysis* – com foco na explicação de estruturas lógicas e associações que são inerentes a conceitos matemáticos e (ii) *lesson study* – estrutura colaborativa em que professores se empenham em melhorar a qualidade de sua prática letiva.

A proposta dessa oficina é desenvolver um estudo coletivo inspirado no modelo de um *concept study*, oferecendo a oportunidade de que os participantes interajam com o seu *saber pedagógico de conteúdo* com vistas a ampliar seu *metas-saber* a partir da troca com outros professores. O tema escolhido para o estudo é números racionais, pelo reconhecimento de seu valor *elementar* para a Matemática e dos grandes desafios envolvidos nos contextos do ensino e da aprendizagem na escola básica. Além disso, números racionais permeiam grande parte do programa de matemática do ensino básico. Espera-se que sejam alcançados aspectos elementares desse conteúdo, no sentido de Klein, contribuindo, assim, para a reconciliação de possíveis rupturas oriundas da formação inicial dos professores e motivando-os a seguir com autonomia e protagonismo na valorização do desenvolvimento do seu saber pedagógico de conteúdo.

Como antecipado por Davis, o desenvolvimento de um *concepty study* prevê estágios que contemplam, de forma gradativa e encadeada a reflexão realizada pelo grupo, apenas o primeiro estágio, quando se elabora uma lista que reúne as diversas imagens, metáforas, impressões que emergem da reflexão coletiva determinada a partir de uma questão disparadora, pode ser descrito como intencional. Os demais são emergentes, imprevisíveis, não planejados, decorrentes de interesses comuns, conhecimentos divergentes e encontros acidentais promovidos pela reflexão do grupo. O objetivo das atividades a seguir não é conduzir um *concept study*, mas promover o reconhecimento da abordagem dada à observação do conteúdo matemático e da relevância da realidade da *sala de aula* para a discussão. Assim, não pretendemos desenvolver um *concept study*, o que exigiria um período maior de tempo sob um trabalho sistemático. Nossa proposta é promover uma reflexão coletiva, inspirada nos moldes de um *concept study*, que ilumine a importância de que os conteúdos ensinados no ensino básico sejam percebidos a partir da prática e das questões próprias dessa etapa da formação, sem perder de vista a formalização Matemática. Nesse sentido, faz-se fundamental que reconheçam a existência do *saber pedagógico de conteúdo* e de um *metas-saber* do professor. Assim, planejamos convidar os professores para refletir inicialmente a partir das atividades a seguir, como o propósito de estabelecer um vetor inicial para a reflexão. Essas questões, em sua maioria, foram extraídas de pesquisas que tinham como foco o *saber pedagógico de conteúdo* dos professores da escola básica, em particular dos estudos que caracterizam a investigação em desenvolvimento para a tese de doutorado da primeira autora, sob a orientação do segundo autor.

ATIVIDADES

Atividade 1

Suponha que você queira observar se seus alunos são capazes de ordenar números racionais. Qual das seguintes listas de números lhe daria melhores evidencias sobre a compreensão dos seus alunos?

(a) 0,5 7 0,01 11,4

(b) 0,60 2,53 3,14 0,45

(c) 0,6 4,25 0,565 2,5

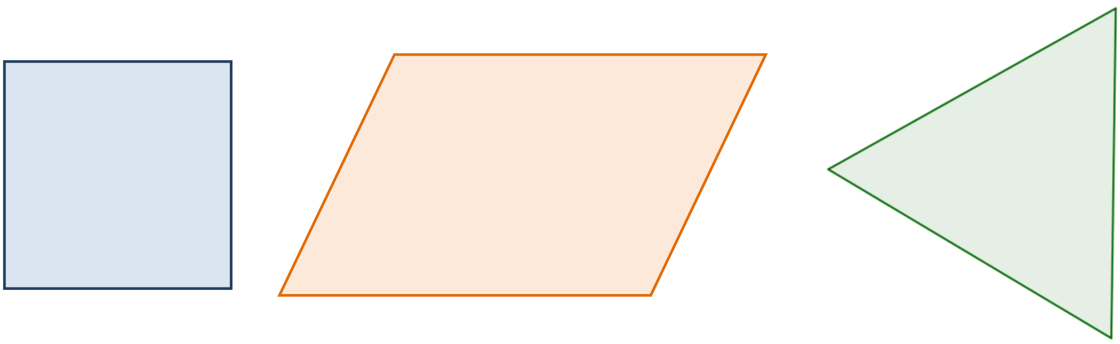
(d) Essas listas são igualmente boas para avaliar a compreensão dos estudantes sobre a ordenação de números racionais.

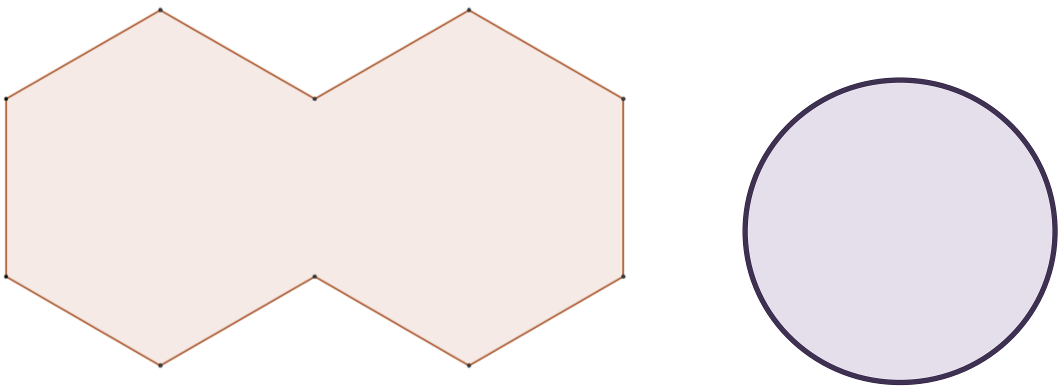
(Esta questão foi extraída do trabalho de Ball & Bass (2003), que tem como foco a investigação sobre a relação entre o saber de conteúdo do professor e a aprendizagem dos estudantes da escola básica. Essa questão ilustra um dos problemas que a autora destaca como relativos ao ensino da disciplina, o problema de avaliar a compreensão dos estudantes sobre determinado assunto.)

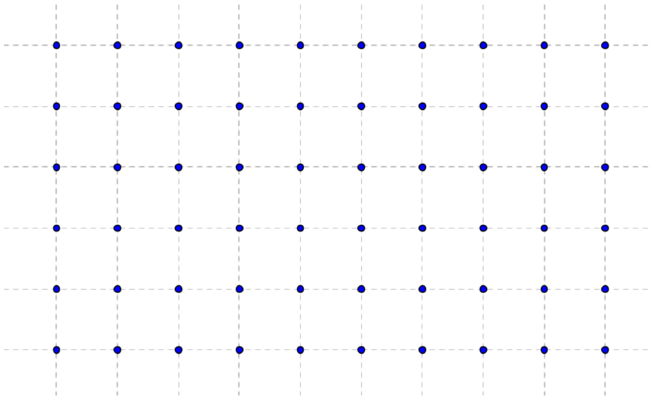
Atividade 2

Representações de frações.

(a) Em cada item, represente a partir das figuras a fração $\frac{1}{4}$:





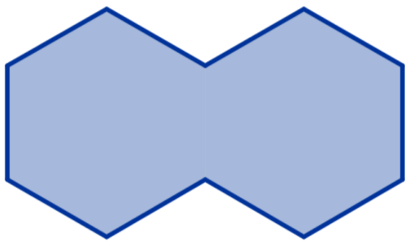


(b) Qual dessas figuras você usaria para representar a fração $\frac{1}{6}$?

(c) E a fração $\frac{1}{5}$?

Atividade 3

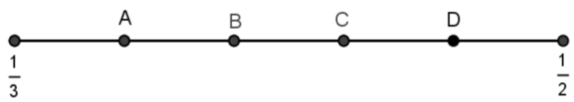
Suponha que a figura a seguir, formada pela justaposição de dois hexágonos regulares e congruentes, corresponda a $\frac{3}{4}$ de um desenho. Complete esse desenho.



Atividade 4

Considere a seguinte questão:

Manuela dividiu um segmento de reta em cinco partes iguais e depois marcou as frações $\frac{1}{3}$ *e* $\frac{1}{2}$ *nas extremidades, conforme a figura abaixo.*



Em qual dos pontos Manuela deverá assinalar a fração $\frac{2}{5}$*?*

a) A　　*b) B*　　*c) C*　　*d) D*

(Questão extraída da Prova de Matemática do Exame de Seleção para o Ensino Médio do Centro Federal de Educação Celso Suckow da Fonseca – CEFET/RJ, no ano de 2010.)

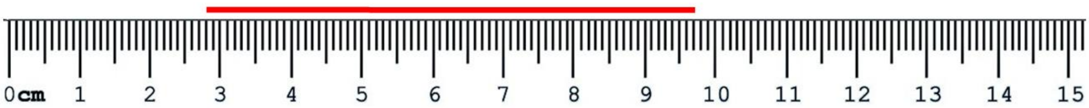
(a) Resolva a questão.

(b) É claro que, por se tratar de uma questão de múltipla escolha, o fato de um estudante, ao resolver a questão, marcar a resposta correta não indica que ele tenha resolvido corretamente a questão. Também não revela a estratégia usada na solução, sendo ela correta ou não. Identifique um raciocínio errado que poderia levar à solução correta dessa questão.

(c) Reescreva a questão de modo a evitar que o raciocínio errado identificado no item anterior leve à resposta correta, fazendo o mínimo de alteração no enunciado.

Atividade 5

Indique duas maneiras diferentes de se calcular a medida do segmento em destaque na figura a seguir usando a régua que aparece na imagem:



Atividade 6

Que fração em cada par é maior?

Atenção, tente argumentar de mais do que uma forma. Evite modelos ou desenhos. Não reduza ao mesmo denominador nem faça uso da multiplicação transversa. Baseie-se em conceitos.

(a) $\frac{4}{5}$ *ou* $\frac{4}{9}$ (b) $\frac{3}{8}$ *ou* $\frac{4}{7}$ (c) $\frac{9}{8}$ *ou* $\frac{4}{3}$

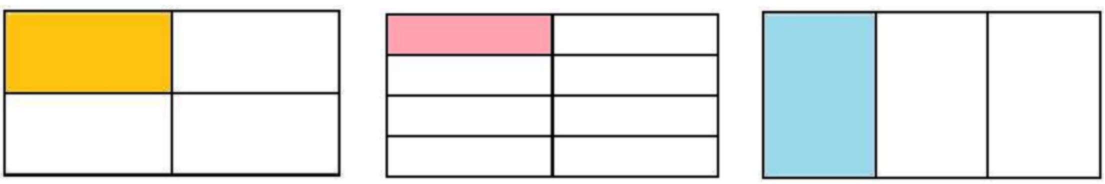
(d) $\frac{4}{7}$ *ou* $\frac{5}{7}$ (e) $\frac{7}{12}$ *ou* $\frac{5}{12}$ (f) $\frac{4}{6}$ *ou* $\frac{7}{12}$

(g) $\frac{3}{8}$ *ou* $\frac{5}{8}$ (h) $\frac{3}{5}$ *ou* $\frac{3}{7}$ (i) $\frac{9}{8}$ *ou* $\frac{7}{6}$

(j) $\frac{3}{4}$ *ou* $\frac{9}{10}$ (k) $\frac{5}{8}$ *ou* $\frac{6}{10}$ (l)

Atividade 7

Tome três folhas de papel do mesmo tamanho. Por meio de dobraduras, use essas folhas para representar as frações $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{3}$ como mostram as figuras a seguir:



Em seguida, dobre novamente as folhas de forma que seja conveniente para responder às questões a seguir:

(a) Ordene as três frações.

(b) Expresse as três frações de formas equivalentes, a partir de uma subdivisão comum.

(c) Determine as somas: $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{3}$; $\frac{1}{4} .+ \frac{1}{8}$; $\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{8} + \frac{1}{3}$

(d) Determine as diferenças: $\frac{1}{3} - \frac{1}{8}$; $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ e $\frac{1}{4} - \frac{1}{8}$

(e) De que forma você explicaria a seus alunos porque foi necessário fazer novas dobraduras que determinaram subdivisões para responder as questões anteriores?

Atividade 8

i. Proponha uma questão matemática própria do contexto do ensino básico cuja solução se estabeleça a partir do cálculo de

$5 \div \frac{1}{2}$.

ii. Use a interpretação de divisão como medida para calcular:

(a) $2 \div \frac{1}{3}$ (b) $\frac{12}{5} \div \frac{6}{10}$

(c) $\frac{3}{2} \div \frac{1}{2}$ (d) $\frac{12}{5} \div \frac{6}{10}$

(e) $\frac{8}{3} \div \frac{4}{9}$ (f) $\frac{2}{5} \div \frac{7}{4}$

iii. Represente, a partir de figuras, as seguintes divisões (i), (ii) e (iii).

Atividade 9

Um recipiente pode ser preenchido até $\frac{4}{9}$ de sua capacidade com $\frac{2}{3}$ de um litro de água. Quantos litros de água esse recipiente comporta se for totalmente preenchido? Apresente duas formas de resolver o problema. Explique como pensou.

Atividade 10

Uma biblioteca tinha todos os seus livros acomodados em 6 estantes completamente cheias. Essas estantes foram substituídas por novas. A capacidade de cada estante nova é igual a $\frac{3}{4}$ da capacidade de uma das estantes antigas. Quantas estantes novas serão necessárias para acomodar todos os livros da biblioteca?

Atividade 11

Observe os cálculos a seguir:

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{8} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$$

(a) Calcule, a partir de duas estratégias distintas, o valor de $\frac{1}{7}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{7}$.

(b) Apresente uma representação geométrica que explicite o cálculo de $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$

(c) Sejam a e b números naturais tais que $\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$. Determine a em função de b.

(d) Mostre que, dado n natural não nulo, tem-se que $\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n-1}$.

Atividade 12

I – No contexto de números positivos, considere a multiplicação de duas frações, e classifique as afirmações a seguir como verdadeiras ou falsas, justificando a sua escolha:

(a) O produto é sempre menor do que ambas as frações.

(b) O produto é sempre um número entre as duas frações.

(c) O produto é sempre maior do que ambas as frações.

(d) O produto pode será maior ou menor do que as duas frações.

II – Ainda no contexto de números positivos, considere a divisão de duas frações, e classifique as afirmações a seguir como verdadeiras ou falsas, justificando a sua escolha:

(a) O resultado da divisão de duas frações menores do que 1 e sempre uma fração menor do que 1.

(b) O resultado da divisão de duas frações maiores do que 1 e sempre uma fração maior do que 1.

Referências

[1] Ball, D.L. (1988) The subject matter preparation of prospective mathematics teachers: Challenging the myths. National Center for Research on Teacher Education, College of Education, Michigan State University, 1988. Disponível em: http://ncrtl.msu.edu/research.htm

[2] Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? Journal of Teacher Education, 59 (5), 389-407.

[3] Ball, D., Charalambous, C.; Thames, M. & Lewis, J. (2009a). *Teacher knowledge and teaching: Viewing a complex relationship from three perspectives*. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds), Proceedings of 33rd Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education (vol. 1, pp. 121–150). Thessaloniki, GR: PME

[4] Ball, D. et al. (2009b). Mathematical Knowledge for teaching: Focusing on the work teaching and its demands. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds), Proceedings of 33rd Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education (vol. 1, pp. 133–139). Thessaloniki, GR: PME.

[5] Ball & Bass

[6] Davis, B. (2008). *Is 1 a prime number? Developing teacher knowledge through concept study*. Mathematics Teaching in the Middle School (NCTM), 14(2), 86-91.

[7] Davis, B. & Renert, M. (2009a). *Concept Study as a response to algorithmetic*. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds), Proceedings of 33rd Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education (vol.1, pp.126–132). Thessaloniki, GR: PME.

[8] Davis, B., & Renert, M. (2009b). *Mathematics for teaching as shared, dynamic participation*. For the Learning of Mathematics, 29(3), 37-43 (Special Issue, guest edited by J. Adler & D. Ball).

[9] Davis, Brent. (2010). *Concept Studies: Designing settings for teacher's disciplinary knowledge*. Proceedings of the 34th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Minas Gerais, Brasil, 1, pp.63-78.

[10] Klein, Felix. (2010). Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Aritmetics, Algebra , Analysis. USA: Breinigsville.

[11] Krauss, S., Brunner, M., Kunter, M., Baumert, J. , Blum, W., Neubrand, M. ; Jordan, A. (2008) *Pedagogical content knowledge and content knowledge of secondary mathematics teachers*. Journal of Educational Psychology, Vol 100(3), Aug 2008, 716-725.

[12] Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, Vol.15, pp.4-14.

[13] Shulman, L. (1987). *Knowledge and teaching: foundations of the new reform*. Havard Educational Review, 1997, v. 57, pp. 1–22.

[14] Schubring, Gert. (2003). *Análise Histórica de Livros de Matemática*. Notas de Aula. Campinas: Editora Autores Associados.

[15] Schubring, Gert. (2013, a aparecer). *A Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior: Felix Klein e a sua Atualidade*. In Roque, T, & Giraldo, V. (eds.), O Saber do Professor de Matemática: Ultrapassando a Dicotomia entre Didática e Conteúdo. Rio de Janeiro: Ciência Moderna.